Sciences en français
Mathématiques

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

16 mars 2021

Table des matières

1 Introduction aux mathématiques : vocabulaire, logique et raisonnements **1**

1.1 Exemples d'objets mathématiques 1

1.1.1 Ensembles et éléments 1

1.1.2 Fonctions 2

1.2 Quelques éléments de logique 4

1.2.1 Variables et propositions mathématiques 4

1.2.2 Connecteurs logiques 5

1.2.3 Quantificateurs 9

1.3 Utilisation des quantificateurs : vocabulaire sur les fonctions 11

1.4 Formules en mathématiques : l'exemple de la trigonométrie 14

1.4.1 Rappel : les fonctions trigonométriques 14

1.4.2 Formulaire 15

1.5 Méthodes de démonstration 17

1.5.1 Vocabulaire 17

1.5.2 Quelques exemples de rédaction 17

1.5.3 Raisonnements classiques 21

2 Vecteurs du plan et de l'espace **26**

Chapitre 1 Introduction aux mathématiques : vocabulaire, logique et raisonnements

1.1 Exemples d'objets mathématiques

1.1.1 Ensembles et éléments

Définition 1
*Un **ensemble** \集合\ E est une collection d'objets, appelés **éléments** \元素\ de E.*

Définition 2
*On dit que x **appartient** \$x$属于$E$\ à E si x est un élément de l'ensemble E. On note $x \in E$.*

Définition 3
*Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** \$E$包含于$F$\ dans F si tout élément de E est aussi élément de F. On note $E \subset F$. On dit que E est un **sous-ensemble** (ou une **partie**) de F.*

On travaillera avec les ensembles de nombres suivants :

Ensemble	*Notation*	*Exemples d'éléments*
Nombres entiers naturels \自然数\	$\mathbb{N}$	$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.
Nombres entiers relatifs \整数\	$\mathbb{Z}$	$\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
Nombres rationnels \有理数\	$\mathbb{Q}$	$\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*$
Nombres réels \实数\	$\mathbb{R}$	$1,\ -3,\ \frac{1}{2},\ \sqrt{2},\ \pi,\ \ldots$
Nombres complexes \复数\	$\mathbb{C}$	$a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

Ces ensembles privés de 0 sont notés $\mathbb{N}^*$ (se lit « $\mathbb{N}$ étoile ») , $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$.

Exemples 4 *Donnons des exemples d'**inclusions**.*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Nous rencontrerons également les ensembles de nombres suivants.

- L'ensemble des **nombres réels positifs** (≥ 0 (se lit « supérieur ou égal à 0 »)) est noté $\mathbb{R}_+$ (se lit « $\mathbb{R}$ plus ») .
- L'ensemble des **nombres réels strictement positifs** (> 0 (se lit « strictement supérieur à 0 »)) est noté $\mathbb{R}_+^*$ (se lit « $\mathbb{R}$ plus étoile ») .
- L'ensemble des **nombres réels négatifs** (≤ 0 (se lit « inférieur ou égal à 0 »)) est noté $\mathbb{R}_-$ (se lit « $\mathbb{R}$ moins ») .
- L'ensemble des **nombres réels strictement négatifs** (< 0 (se lit « strictement inférieur à 0 »)) est noté $\mathbb{R}_-^*$ (se lit « $\mathbb{R}$ moins étoile ») .

1.1.2 Fonctions

DÉFINITION 5
Soient E et F deux ensembles. Une ***fonction*** *(ou application)* \函数\ *de E vers F est un objet qui à tout élément x de E associe un et un seul élément y de F, noté $f(x)$ (se lit « f de x »).*

On note $f : E \longrightarrow F$ pour signifier que f est une application de E dans F.

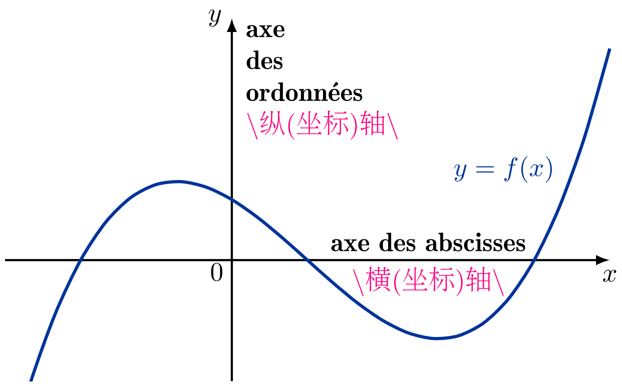
- E est appelé **l'ensemble de définition** \定义域\ de f,
- F est appelé **l'ensemble d'arrivée** \值域\ de f,
- $f(x)$ est appelé **l'image** \象\ de x par f,

On peut préciser les images avec la notation

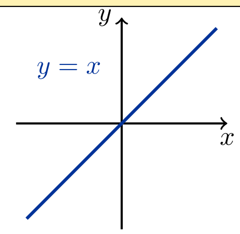
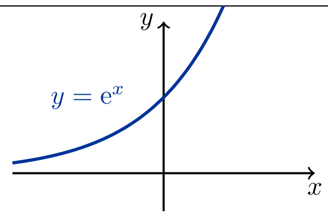
$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array},$$

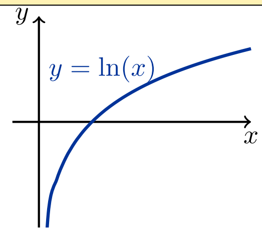
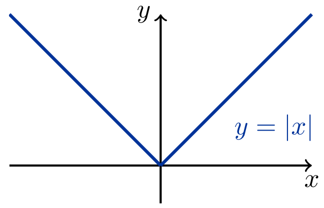
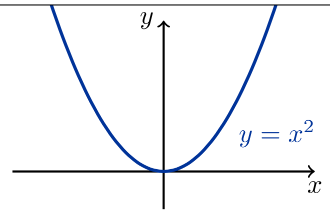
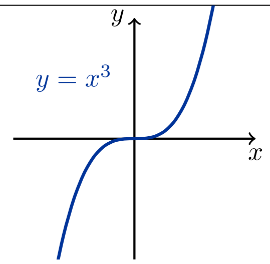
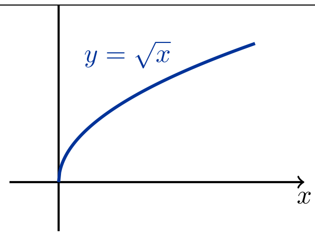
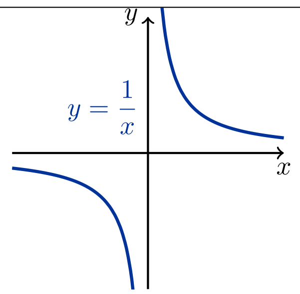
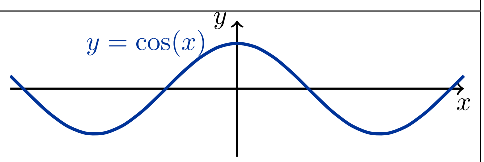
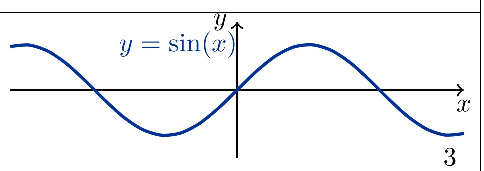
(« la fonction f de E dans F qui à x associe f de x » ou « la fonction f de E dans F, à x on associe f de x »).

DÉFINITION 6
La ***représentation graphique*** \图象\ *d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou courbe représentative) est l'ensemble des* ***points*** \点\ *de* ***coordonnées*** \坐标\ *$(x, f(x))$, où $x \in I$.*



Donnons des exemples de fonctions usuelles.

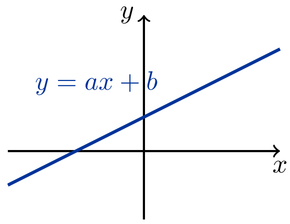
Nom de la fonction	*Notation*	*Représentation graphique*
Identité \恒同\	$\mathrm{id} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$	
Exponentielle \指数函数\	$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$ $\exp(x)$: « exponentielle x »	

Nom de la fonction	*Notation*	*Représentation graphique*
Logarithme (népérien) \对数函数\	$\begin{array}{rccl} \ln : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$ $\ln(x)$: « ln de x »	
Valeur absolue	$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lvert x \rvert \end{array}$ $\lvert x \rvert$: « valeur absolue de x »	
Carré \平方\	$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ x^2 : « x au carré »	
Cube \立方\	$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ x^3 : « x au cube » ou « x puissance 3 »	
Racine carrée \平方根\	$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ $\sqrt{x}$: « racine carrée de x »	
Inverse \反比例函数/倒数\	$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ $\dfrac{1}{x}$: « 1 sur x »	
Cosinus \余弦\	$\begin{array}{rccl} \cos : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$ $\cos(x)$: « cosinus x »	
Sinus \正弦\	$\begin{array}{rccl} \sin : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$ $\sin(x)$: « sinus x »	

Les fonctions **affines** sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array},$$

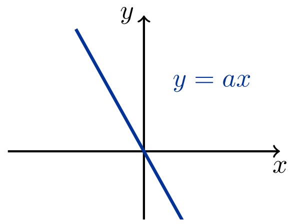
où a, $b \in \mathbb{R}$.



Dans le cas où $b = 0$, on parle de fonctions **linéaires**.
Ce sont donc les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array},$$

où $a \in \mathbb{R}$.



1.2 Quelques éléments de logique

1.2.1 Variables et propositions mathématiques

Définition 7
*Une **proposition** \命题\ (ou assertion) est une phrase mathématique qui est soit **vraie** \真\ (noté V), soit **fausse** \错误\ (noté F).*

Exemples 8
- « $1 + 1 = 2$ » (se lit « 1 plus 1 égal 2 ») *est une proposition, qui est vraie.*
- « $5 \times 2 = 4$ » (se lit « 5 fois 2 égal 4 ») *est une proposition, qui est fausse.*

En mathématiques, on utilise des **variables** \变量\. Il s'agit presque toujours de lettres (x, y, a, b, n, $\ldots$) parfois indicées (x_1, x_2, $\ldots$). C'est un nom d'objet, qui ne désigne pas un objet particulier mais des objets appartenant à un certain ensemble.

Souvent, une proposition dépend d'une ou plusieurs variables. Sa **valeur de vérité** (vraie ou fausse) peut alors être donnée lorsque l'on précise les **valeurs** \值\ des variables. En général, on note $P(x)$ une proposition qui dépend de la variable est x.

Exemples 9
- *La phrase $P(x)$ « $x + 1 = 2$ » est une proposition à une variable. Par exemple, $P(1)$ est vraie et $P(2)$ est fausse.*
- *La phrase $P(n, k)$ « $n + k = 3$ » est une proposition à deux variables. Par exemple, $P(2, 1)$ est vraie et $P(2, 0)$ est fausse.*
- *La phrase $P(x, A)$ « $x \in A$ » est une proposition à deux variables. Par exemple, $P(1, \mathbb{N})$ est vraie et $P(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$ est fausse.*

Définition 10
*Soient P et Q deux propositions. Si P est vraie lorsque Q est vraie et si P est fausse lorsque Q est fausse, on dit que P et Q sont **logiquement équivalentes** ou qu'elles ont la même table de vérité. On note $P \equiv Q$.*

Exemple 11 — *Soient $P(x)$ la proposition « $x > 0$ » (se lit « x strictement supérieur à 0 ») et $Q(x)$ la proposition « $-x < 0$ » (se lit « moins x strictement inférieur à 0 ») . Alors $P(x) \equiv Q(x)$.*

Définition 12
Soit E un ensemble. Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable x. On note $\{x \in E \mid P(x)\}$ (se lit « l'ensemble des x appartenant à E tels que $P(x)$ ») l'ensemble des éléments de E tels que $P(x)$ est vraie.

Exemples 13
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ *: c'est l'ensemble des nombres réels positifs.*
- $\mathbb{R}_-^* = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$ *: c'est l'ensemble des nombres réels strictement négatifs.*
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ *: c'est l'**intervalle*** \区间\ $[a, b[$ *(fermé en a, ouvert en b).*
  ($a \leq x < b$ se lit, par exemple, « x supérieur ou égal à a et strictement inférieur à b »)
- $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \textit{ est pair}\} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *: c'est l'ensemble des **nombres pairs*** \偶数\.
- $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \textit{ est impair}\} = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *: c'est l'ensemble des **nombres impairs*** \奇数\.

Remarque 14 — *À chaque fois que l'on écrit une phrase mathématique, il est sous-entendu qu'elle est vraie.*

1.2.2 Connecteurs logiques

À partir d'une ou plusieurs propositions, on peut construire d'autres propositions.

1.2.2.a. Négation

Soit P une proposition. La **négation** de P est la proposition $non(P)$ (aussi notée $\neg P$), qui est
- vraie lorsque P est fausse,
- fausse lorsque P est vraie.

On représente les valeurs de vérité de $non(P)$ en fonction de celles de P dans une table de vérité :

P	$non(P)$
V	F
F	V

Généralement, on remplace la proposition $non(P)$ par une proposition logiquement équivalente.

P	$non(P)$
$x > 4$ (se lit « x est strictement supérieur à 4 »)	$x \leq 4$ (se lit « x est inférieur ou égal à 4 »)
$a = 3$ (se lit « a égal 3 »)	$a \neq 3$ (se lit « a différent de 3 »)
$x \in \mathbb{N}$ (se lit « x appartient à $\mathbb{N}$ » ou « x est un entier naturel »)	$x \notin \mathbb{N}$ (se lit « x n'appartient pas à $\mathbb{N}$ » ou « x n'est pas un entier naturel »)
n est pair	n est impair
L'ensemble E a au moins deux éléments	L'ensemble E a au plus un élément
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction **croissante** \增函数\	$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas croissante
Les **droites** \直线\ $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **parallèles** \平行\	Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **sécantes** \相交/相割\.

1.2.2.b. « Ou »

Soient P et Q des propositions. La proposition « P *ou* Q » (aussi notée $P \vee Q$) est la proposition qui est

- fausse lorsque P et Q sont fausses simultanément,
- vraie dans les autres cas.

On résume cela dans une table de vérité :

P	Q	P *ou* Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemples 15

P	Q	P *ou* Q
$x \in [0, 4]$	$x \in [2, 8]$	$x \in [0, 8]$
$x > 0$	$x = 0$	$x \geq 0$
$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$ *(se lit « x appartient à A union B »)*

1.2.2.c. « Et »

Soient P et Q des propositions. La proposition « P *et* Q » (aussi notée $P \wedge Q$) est la proposition qui est

- vraie lorsque les deux propositions sont vraies simultanément,
- fausse dans les autres cas.

On résume cela dans une table de vérité :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemples 16

P	Q	P *et* Q
$x \in [0, 4]$	$x \in [2, 8]$	$x \in [2, 4]$
$x < 10$	$x \geq 2$	$x \in [2, 10[$
$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$ *(se lit « x appartient à A inter B »)*
*ABCD est un **losange*** \菱形\	*ABCD est un **rectangle*** \矩形\	*ABCD est un **carré*** \正方形\

1.2.2.d. Quelques règles de calcul

Proposition 17
Soient P, Q et R des propositions. On a :

- $non(non\, P) \equiv P$,
- $non(P \text{ et } Q) \equiv (non\, P) \text{ ou } (non\, Q)$,
- $non(P \text{ ou } Q) \equiv (non\, P) \text{ et } (non\, Q)$,

- *P et (Q ou R) $\equiv$ (P et Q) ou (P et R),*
- *P ou (Q et R) $\equiv$ (P ou Q) et (P ou R),*
- *La proposition « P et (non P) » est toujours fausse,*
- *La proposition « P ou (non P) » est toujours vraie : soit P est vraie, soit non(P) est vraie.*

Preuve — On peut démontrer ces propriétés avec des tables de vérité. Donnons un exemple.

P	*Q*	*P et Q*	*non(P et Q)*	*non(P)*	*non(Q)*	*non(P) ou non(Q)*
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Donc *non*(P *et* Q) $\equiv$ *non*(P) *ou non*(Q). □

Exemple 18 — *La négation de « $x \geq 1$ et $x < 4$ » est « $x < 1$ ou $x \geq 4$ ».*

Remarque 19 — *Une proposition qui ne peut être que fausse s'appelle une* ***contradiction*** \矛盾\.

1.2.2.e. Implication

Soient P et Q des propositions. La proposition « $P \Rightarrow Q$ » (se lit « P implique Q » ou « si P, alors Q ») est la proposition qui est

- fausse lorsque P est vraie et Q est fausse,
- vraie dans les autres cas.

On résume cela dans la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque 20 — *Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que*

- *P est une* ***condition suffisante*** *pour Q,*
- *Q est une* ***condition nécessaire*** *pour P.*

Exemples 21

- *La proposition « 2 est pair $\Rightarrow$ 3 est impair » est vraie.*
- *La proposition « 2 est impair $\Rightarrow$ 3 est pair » est vraie (même si c'est surprenant).*
- *La proposition « 2 est pair $\Rightarrow$ 3 est pair » est fausse.*
- *La proposition « 2 est impair $\Rightarrow$ 3 est impair » est vraie.*
- *La proposition « Si $x > 2$ alors $x^3 > 8$ » est vraie.*

Ainsi, lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on ne peut rien dire sur la valeur de vérité de P.

Proposition 22
On a $P \Rightarrow Q \equiv$ non(P) ou Q.

Preuve — Montrons que ces deux propositions ont la même table de vérité.

P	*Q*	$P \Rightarrow Q$	*non(P)*	*non(P) ou Q*
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

□

On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 23
La négation de la proposition « $P \Rightarrow Q$ » est « P et non(Q) ».

Preuve — *non$(P \Rightarrow Q)$ $\equiv$ non(non(P) ou Q) $\equiv P$ et non(Q).* □

EXEMPLE 24 — *Soit $x \in \mathbb{R}$. La négation de « $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ » est $x^2 = 1$ et $x \neq 1$.*

DÉFINITION 25
- *La proposition « $Q \Rightarrow P$ » s'appelle la* ***réciproque*** *de l'implication « $P \Rightarrow Q$ ».*
- *La proposition « non$(Q) \Rightarrow$ non(P) » s'appelle la* ***contraposée*** *de l'implication « $P \Rightarrow Q$ ».*

EXEMPLE 26 — *Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons la proposition « $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ »*
- *Sa contraposée est « $x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$ ».*
- *Sa réciproque est « $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ ».*

PROPOSITION 27
On a $P \Rightarrow Q \;\equiv\; (\text{non}\, Q) \Rightarrow (\text{non} P)$.

Preuve — *$P \Rightarrow Q \;\equiv\;$ non(P) ou $Q \;\equiv\; Q$ ou non$(P) \;\equiv\;$ non(non(Q)) ou non$(P) \;\equiv\;$ non$(Q) \Rightarrow$ non(P).* □

PROPOSITION 28
Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ alors $P \Rightarrow R$.

1.2.2.f. Équivalence

Soient P et Q des propositions. La proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » (se lit « P équivalent à Q » ou « P si et seulement si Q ») est la proposition qui est
- vraie lorsque les propositions P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses,
- fausse dans les autres cas.

On résume cela dans la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

EXEMPLES 29
- *La proposition « $(1 = 1) \Leftrightarrow (0 = 0)$ » est vraie.*
- *La proposition « $(1 = 0) \Leftrightarrow (2 = 0)$ » est vraie.*
- *La proposition « $(1 = 0) \Leftrightarrow (0 = 0)$ » est fausse.*
- *Soit x un nombre réel. La proposition « $x > 2$ si et seulement si $x^3 > 8$ » est vraie.*

PROPOSITION 30
On a $P \Leftrightarrow Q \;\equiv\; (P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$.

Si la proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » est vraie, on dit que Q est une **condition nécessaire et suffisante** pour P et on dit que P et Q sont **équivalentes**.

REMARQUE 31 — *Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on peut dire que P et Q ont les mêmes valeurs de vérité et donc $P \;\equiv\; Q$.*

1.2.3 Quantificateurs \量词\

1.2.3.a. Quantificateurs universel et existentiel

Soit E un ensemble. Soit $P(x)$ une proposition dépendant de la variable x, avec $x \in E$.

DÉFINITION 32
*Le **quantificateur universel** \全称量词\, noté* $\forall$ (se lit « pour tout » ou « quel que soit ») *permet de définir la proposition* « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ » *qui est*

- *vraie lorsque pour tous les éléments x appartenant à E, $P(x)$ est vraie,*
- *fausse sinon (c'est-à-dire si $P(x)$ est fausse pour **au moins** \至少\ un élément x de E).*

EXEMPLES 33

- *La proposition* « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ » *est vraie.*
- *La proposition* « $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n-3)n > 0$ » *est fausse : pour $n = 1$, $(n-3)n = -2 \leq 0$.*
- *La proposition* « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$ » *est vraie.*

DÉFINITION 34
*Le **quantificateur existentiel** \存在量词\, noté* $\exists$ (se lit « il existe … tel que ») *permet de définir la proposition* « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » *qui est*

- *vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E,*
- *fausse lorsque $P(x)$ est fausse pour tous les éléments x de E.*

REMARQUE 35 — *« Il existe un » signifie « il existe **au moins** \至少\ un ».*

On rencontre parfois la notation « $\exists!\, x \in E,\ P(x)$ » (se lit « il existe un **unique** \唯一的\ élément x de E tel que $P(x)$ ») qui signifie qu'il existe un et un seul élément x de E vérifiant $P(x)$.

EXEMPLES 36

- *La proposition* « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4$ » *est vraie, par exemple, pour $x = 2$ ou $x = -2$.*
- *La proposition* « $\exists\, n \in \mathbb{N},\ n^2 = 2$ » *est fausse.*
- *La proposition* « $\exists!\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) = 0$ » *est vraie : l'unique élément de $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\ln(x) = 0$ est $x = 1$.*

REMARQUE 37 — *Si la proposition* « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ » *est vraie alors la proposition* « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » *est vraie. Mais la proposition* « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » *peut être vraie et la proposition* « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ » *fausse. Voyons cela dans l'exemple qui suit.*

EXEMPLES 38

- *La proposition* « $\forall\, x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ » *est fausse : par exemple, pour $x = -1$, $x<0$.*
- *La proposition* « $\exists\, x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ » *est vraie : par exemple, pour $x = 1$, $x\geq 0$.*

Les quantificateurs sont donc extrêmement importants en mathématiques. L'exemple précédent nous montre que sans précision sur la variable x, la proposition « $x \geq 0$ » n'a pas de sens.

Les symboles « $\forall$ » et « $\exists$ » ne sont pas des **abréviations** \缩写/简写\, ils ne doivent pas être utilisés dans une phrase en français.

PROPOSITION 39
On a

- *non*$(\forall\, x \in E,\ P(x)) \ \equiv\ \exists\, x \in E,\ $*non*$(P(x))$,
- *non*$(\exists\, x \in E,\ P(x)) \ \equiv\ \forall\, x \in E,\ $*non*$(P(x))$.

Exemple 40 — *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La négation de « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ » est « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$ ».*

On peut intervertir les quantificateurs de même nature.

Proposition 41
Soit $P(x, y)$ une proposition dépendant de deux variables. On a
- $\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in F,\ P(x, y)\ \equiv\ \forall\, y \in F,\ \forall\, x \in E,\ P(x, y)$.
- $\exists\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x, y)\ \equiv\ \exists\, y \in F,\ \exists\, x \in E,\ P(x, y)$.

On ne peut pas intervertir $\forall$ et $\exists$. Par exemple, les propositions suivantes n'ont pas la même signification.
- La proposition « $\forall\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x, y)$ » signifie que pour tout $x \in E$, il existe une valeur $y \in F$ (qui dépend *a priori* de x) telle que $P(x, y)$ est vraie. On dit que y dépend de x.
- La proposition « $\exists\, y \in F,\ \forall\, x \in E,\ P(x, y)$ » signifie qu'il existe une valeur $y \in F$ telle que $P(x, y)$ est vraie pour toutes les valeurs de x dans E (c'est le même y pour tous les x).

Exemples 42
- *La proposition « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ x \geq y$ » signifie que tout nombre réel x est supérieur ou égal à un nombre réel y (qui dépend de x). C'est une proposition qui est vraie : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut prendre $y = x - 1$ et on a $x \geq y$.*
- *Mais la proposition « $\exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x \geq y$ » signifie que tout nombre réel x est supérieur ou égal à un même nombre réel y. C'est une proposition qui est fausse.*

Proposition 43
La négation de « $\forall\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x, y)$ » est « $\exists\, x \in E,\ \forall\, y \in F,\ non(P(x, y))$ ».

Exemple 44 — *La négation de « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$ » est « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ y^2 \leq x$ ».*

Proposition 45
On a
- $\forall\, x \in E,\ (P(x)\ et\ Q(x)) \Leftrightarrow (\forall\, x \in E,\ P(x))\ et\ (\forall\, x \in E,\ Q(x))$,
- $\forall\, x \in E,\ (P(x)\ ou\ Q(x)) \Leftarrow (\forall\, x \in E,\ P(x))\ ou\ (\forall\, x \in E,\ Q(x))$,
- $\exists\, x \in E,\ (P(x)\ et\ Q(x)) \Rightarrow (\exists\, x \in E,\ P(x))\ et\ (\exists\, x \in E,\ Q(x))$,
- $\exists\, x \in E,\ (P(x)\ ou\ Q(x)) \Leftrightarrow (\exists\, x \in E,\ P(x))\ ou\ (\exists\, x \in E,\ Q(x))$,

Pour les deuxième et troisième points, il n'y a pas équivalence comme le montrent les exemples suivants.

Exemples 46
- *La proposition « $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n$ est pair ou n est impair $)$ » est vraie.*
  Mais la proposition « $(\forall\, n \in \mathbb{N},\ n$ est pair$)$ ou $(\forall\, n \in \mathbb{N},\ n$ est impair$)$ » est fausse.
- *La proposition « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ (\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = 0)$ » est fausse.*
  Mais la proposition « $(\exists\, x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 0)$ et $(\exists\, x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = 0)$ » est vraie.
  Pour expliciter le fait que le x n'est pas le même dans la proposition « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 0)$ » que dans la proposition « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = 0$ », on pourra utiliser des lettres distinctes. Par exemple, on préférera la notation « $(\exists\, u \in \mathbb{R},\ \cos(u) = 0)$ et $(\exists\, v \in \mathbb{R},\ \sin(v) = 0)$ »

1.2.3.b. Variables muettes

On suppose que la variable y n'apparaît pas dans $P(x)$. Alors

- $\forall x \in E,\ P(x) \ \equiv\ \forall y \in E,\ P(y)$.
- $\exists x \in E,\ P(x) \ \equiv\ \exists y \in E,\ P(y)$.

On dit que la variable apparaissant dans la proposition est **muette** \虚拟变量/哑变量\, on peut la remplacer par n'importe quelle lettre.

Donnons d'autres exemples fréquents en mathématiques où la variable est muette.

Exemples 47

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ *(se lit « l'ensemble des x appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x est supérieur ou égal à 1 »),*
- $\lim\limits_{t\to+\infty} \exp(-t) = 0$ *(se lit « la **limite** \极限\ lorsque t tend vers $+\infty$ de exponentielle moins t est égale à 0 »),*
- $\sum\limits_{k=1}^{5} k = 15$ *(se lit « la **somme** \和\ pour k allant de 1 à 5 des k est égale à 15 »),*
- $\prod\limits_{i=1}^{4} i = 24$ *(se lit « le **produit** \积\ pour i allant de 1 à 4 des i est égal à 24 »),*
- $x \longmapsto x^2 + x + 1$ *(se lit « la fonction qui à x associe $x^2 + x + 1$ »),*
- *L'**équation** \方程\ $z^2 + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.*

1.3 Utilisation des quantificateurs : vocabulaire sur les fonctions

On introduit le vocabulaire à connaître sur les fonctions. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que la fonction f est	Définition	Illustration
la fonction nulle \零函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.$	
~~est~~ s'annule \互相抵销\	$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$	
positive (ou à valeurs positives) \正函数（取值都大于0）\	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$	

On dit que la fonction f est	Définition	Illustration
constante \常值函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y).$ ou $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C.$	
croissante \增函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)).$	
strictement croissante \严格单调递增\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x < y \Rightarrow f(x) < f(y)).$	
décroissante \减函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)).$	
strictement décroissante \严格单调递减\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x < y \Rightarrow f(x) > f(y)).$	
monotone \单调函数\	f est croissante ou f est décroissante	
T-périodique \周期为T的函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + T) = f(x).$	

On dit que la fonction f est	Définition	Illustration
périodique	$\exists\, T \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$	
majorée \有上界\	$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M.$	
minorée \有下界\	$\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ m \leq f(x).$	
bornée \有界\	f est majorée et f est minorée.	
paire \偶函数\	$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x).$	
impaire \奇函数\	$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x).$	

1.4 Formules en mathématiques : l'exemple de la trigonométrie

En mathématiques, une **formule** \公式/计算式\ est souvent une expression à apprendre par cœur ou à retrouver très rapidement. Les formules peuvent être utilisées directement en exercices. Nous donnons dans cette partie les formules à connaître en **trigonométrie** \三角函数\. Elles seront particulièrement utilisées en physique. Un **formulaire** est un ensemble de formules.

1.4.1 Rappel : les fonctions trigonométriques

On munit le plan \平面\ d'un repère orthonormé \直角坐标系\ $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Définition 48
Le ***cercle trigonométrique*** \单位元（可用于研究三角函数）\ *est le* ***cercle*** \圆\ *du plan de* ***centre*** \圆心\ $(0,0)$ *et de* ***rayon*** \半径\ 1.

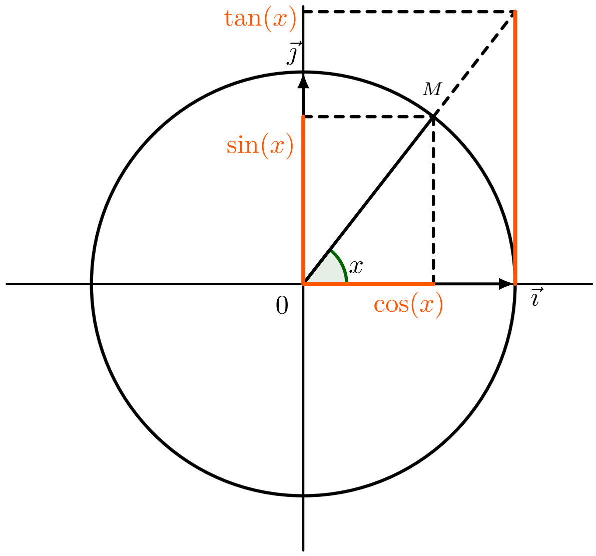
Définition 49
Soit $x \in \mathbb{R}$. *Soit* M *le point du cercle trigonométrique tel que l'****angle*** \角\ *de* ***vecteur*** \向量\ $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ *est égal à* x *(orienté dans le sens direct).*
On note alors

- $\cos(x)$ *l'****abscisse*** \横坐标\ *du point* M,
- $\sin(x)$ *l'****ordonnée*** \纵坐标\ *du point* M.

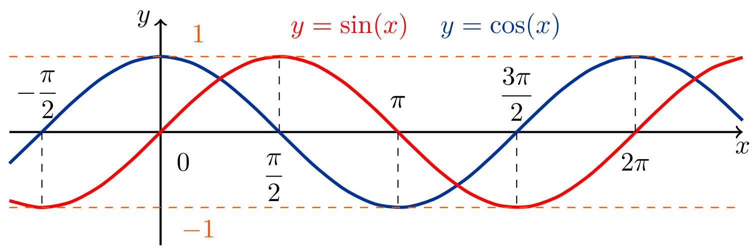
On définit ainsi les fonctions cosinus et sinus de $\mathbb{R}$ *dans* $[-1,1]$.

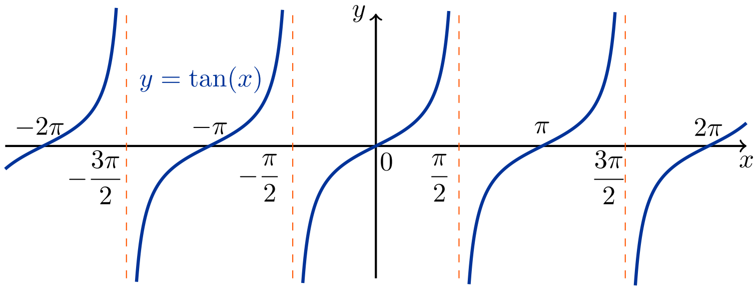
- *La fonction* ***tangente*** \切线\ *est alors définie, pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *(la barre \ se lit « privé de »)* , *par*

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$



Les représentations graphiques sont les suivantes :





Remarque 50 — *Le cercle trigonométrique est l'ensemble des points* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $x^2 + y^2 = 1$.

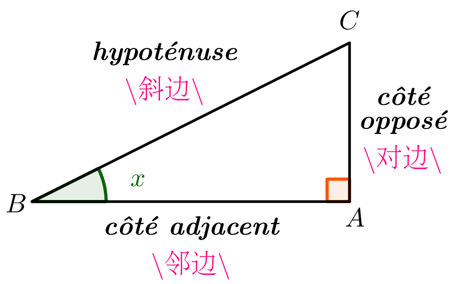
Proposition 51

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $x^2 + y^2 = 1$. *Alors il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $x = \cos(\theta)$ *et* $y = \sin(\theta)$.

Donnons une interprétation sur les triangles \三角形\.

Proposition 52
Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. *Soit* ABC *un* ***triangle rectangle*** \直角三角形\ *en* A *et tel que* $\widehat{ABC} = x$. *On a*

- $\cos(x) = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{BC}$,
- $\sin(x) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$,
- $\tan(x) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{AC}{AB}$.



Proposition 53

- *Les fonctions* cos *et* sin *sont* 2π*-périodiques :*
  $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ *et* $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
- *La fonction* tan *est* π*-périodique :* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}, \forall k \in \mathbb{Z}$, $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$.
- *La fonction* cos *est paire :* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$.
- *La fonction* sin *est impaire :* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$.
- *La fonction* tan *est impaire :* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$, $\tan(-x) = -\tan(x)$.

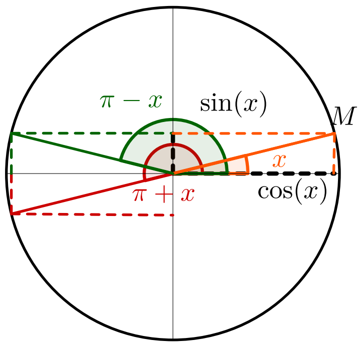
1.4.2 Formulaire

Les formules suivantes se retrouvent par lecture graphique.

Proposition 54 (Symétries \对称\)

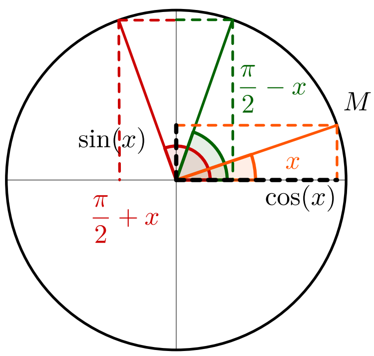
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$,
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.



Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.



Remarque 55 — *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x) \quad \textit{et} \quad \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x).$$

Le tableau des valeurs remarquables est le suivant (à connaître !) :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	X	0

On déduit facilement les autres valeurs par symétrie.

Proposition 56 (Formules d'**addition** \加\ et de **soustraction** \减\ )

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$,
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$,
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$,
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$,
- $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$,
- $\tan(a - b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$.

Les formules suivantes s'obtiennent en prenant $a = b$ dans les formules d'addition.

Proposition 57 (Formule de duplication)

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - \sin^2(a)$,
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$,
- $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$.

On en déduit alors les formules suivantes.

Proposition 58 (Formules de linéarisation)

- $\cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$,
- $\sin^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$.

Proposition 59 (Formules de développement (**développer** \展开\))

- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$,
- $\cos(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}(\sin(a + b) - \sin(a - b))$,
- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b))$,
- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$.

Proposition 60 (Formules de factorisation (**factoriser** \因式分解\))

- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,