Sciences en français
Mathématiques

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

23 mars 2021

Table des matières

Chapitre 1 Introduction aux mathématiques : vocabulaire, logique et raisonnements

1.1 Exemples d'objets mathématiques

1.1.1 Ensembles et éléments

Définition 1
*Un **ensemble** \集合\ E est une collection d'objets, appelés **éléments** \元素\ de E.*

Définition 2
*On dit que x **appartient** \$x$属于$E$\ à E si x est un élément de l'ensemble E. On note $x \in E$.*

Définition 3
*Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** \$E$包含于$F$\ dans F si tout élément de E est aussi élément de F. On note $E \subset F$. On dit que E est un **sous-ensemble** (ou une **partie**) de F.*

On travaillera avec les ensembles de nombres suivants :

Ensemble	*Notation*	*Exemples d'éléments*
Nombres entiers naturels \自然数\	$\mathbb{N}$	$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$
Nombres entiers relatifs \整数\	$\mathbb{Z}$	$\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
Nombres rationnels \有理数\	$\mathbb{Q}$	$\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*$
Nombres réels \实数\	$\mathbb{R}$	$1,\ -3,\ \frac{1}{2},\ \sqrt{2},\ \pi,\ \ldots$
Nombres complexes \复数\	$\mathbb{C}$	$a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

Ces ensembles privés de 0 sont notés $\mathbb{N}^*$ (se lit « $\mathbb{N}$ étoile ») , $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$.

Exemples 4 *Donnons des exemples d'**inclusions**.*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Nous rencontrerons également les ensembles de nombres suivants.

- L'ensemble des **nombres réels positifs** (≥ 0 (se lit « supérieur ou égal à 0 »)) est noté $\mathbb{R}_+$ (se lit « $\mathbb{R}$ plus ») .
- L'ensemble des **nombres réels strictement positifs** (> 0 (se lit « strictement supérieur à 0 »)) est noté $\mathbb{R}_+^*$ (se lit « $\mathbb{R}$ plus étoile ») .
- L'ensemble des **nombres réels négatifs** (≤ 0 (se lit « inférieur ou égal à 0 »)) est noté $\mathbb{R}_-$ (se lit « $\mathbb{R}$ moins ») .
- L'ensemble des **nombres réels strictement négatifs** (< 0 (se lit « strictement inférieur à 0 »)) est noté $\mathbb{R}_-^*$ (se lit « $\mathbb{R}$ moins étoile ») .

1.1.2 Fonctions

DÉFINITION 5
*Soient E et F deux ensembles. Une **fonction** (ou application) \函数\ de E vers F est un objet qui à tout élément x de E associe un et un seul élément y de F, noté $f(x)$ (se lit « f de x »).*

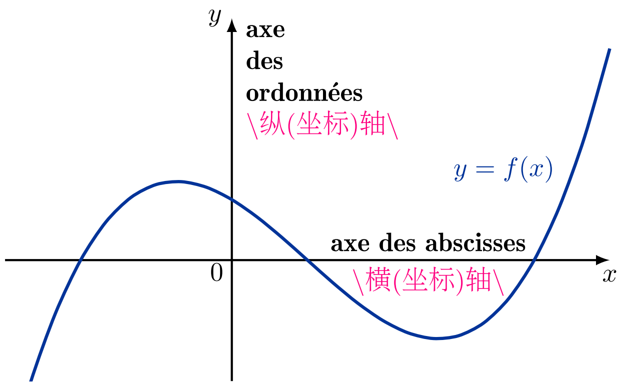
On note $f : E \longrightarrow F$ pour signifier que f est une application de E dans F.
- E est appelé **l'ensemble de définition** \定义域\ de f,
- F est appelé **l'ensemble d'arrivée** \值域\ de f,
- $f(x)$ est appelé **l'image** \象\ de x par f,

On peut préciser les images avec la notation

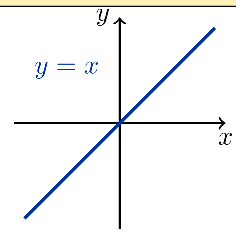
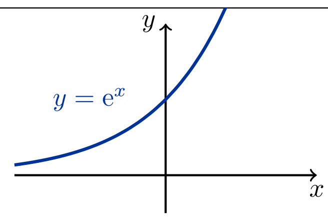
$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array},$$

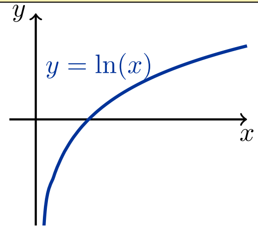
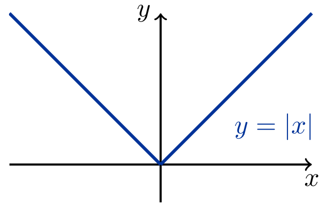
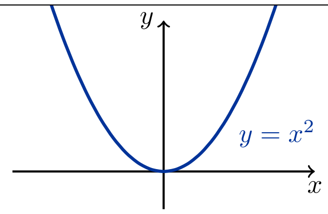
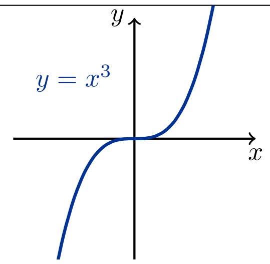
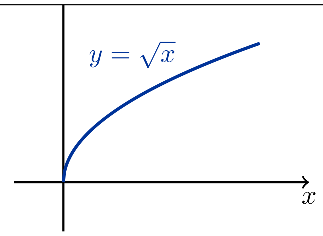
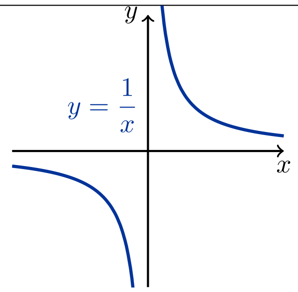
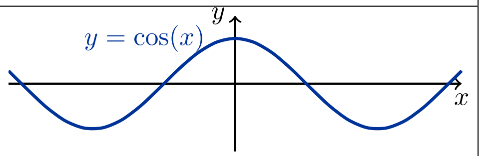
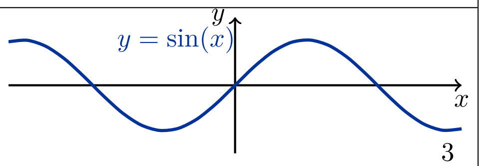
(« la fonction f de E dans F qui à x associe f de x » ou « la fonction f de E dans F, à x on associe f de x »).

DÉFINITION 6
*La **représentation graphique** \图象\ d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou courbe représentative) est l'ensemble des **points** \点\ de **coordonnées** \坐标\ $(x, f(x))$, où $x \in I$.*



Donnons des exemples de fonctions usuelles.

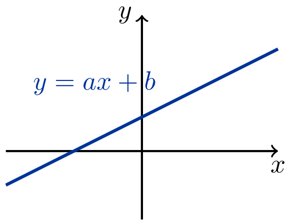
Nom de la fonction	*Notation*	*Représentation graphique*
Identité \恒同\	$\mathrm{id} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$	
Exponentielle \指数函数\	$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$ $\exp(x)$: « exponentielle x »	

Nom de la fonction	*Notation*	*Représentation graphique*
Logarithme (népérien) \对数函数\	$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$ $\ln(x)$: « ln de x »	
Valeur absolue	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$ $\|x\|$: « valeur absolue de x »	
Carré \平方\	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ x^2 : « x au carré »	
Cube \立方\	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ x^3 : « x au cube » ou « x puissance 3 »	
Racine carrée \平方根\	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ $\sqrt{x}$: « racine carrée de x »	
Inverse \反比例函数/倒数\	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ $\dfrac{1}{x}$: « 1 sur x »	
Cosinus \余弦\	$\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$ $\cos(x)$: « cosinus x »	
Sinus \正弦\	$\sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$ $\sin(x)$: « sinus x »	

Les fonctions **affines** sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array},$$

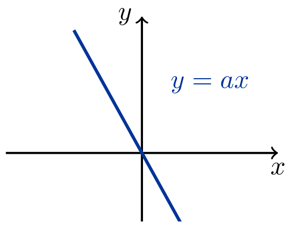
où a, $b \in \mathbb{R}$.



Dans le cas où $b = 0$, on parle de fonctions **linéaires**. Ce sont donc les fonctions de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array},$$

où $a \in \mathbb{R}$.



1.2 Quelques éléments de logique

1.2.1 Variables et propositions mathématiques

Définition 7
*Une **proposition** \命题\ (ou assertion) est une phrase mathématique qui est soit **vraie** \真\ (noté V), soit **fausse** \错误\ (noté F).*

Exemples 8

- « $1 + 1 = 2$ » *(se lit « 1 plus 1 égal 2 »)* *est une proposition, qui est vraie.*
- « $5 \times 2 = 4$ » *(se lit « 5 fois 2 égal 4 »)* *est une proposition, qui est fausse.*

En mathématiques, on utilise des **variables** \变量\. Il s'agit presque toujours de lettres (x, y, a, b, n, $\ldots$) parfois indicées (x_1, x_2, $\ldots$). C'est un nom d'objet, qui ne désigne pas un objet particulier mais des objets appartenant à un certain ensemble.

Souvent, une proposition dépend d'une ou plusieurs variables. Sa **valeur de vérité** (vraie ou fausse) peut alors être donnée lorsque l'on précise les **valeurs** \值\ des variables. En général, on note $P(x)$ une proposition qui dépend de la variable est x.

Exemples 9

- *La phrase $P(x)$ « $x + 1 = 2$ » est une proposition à une variable. Par exemple, $P(1)$ est vraie et $P(2)$ est fausse.*
- *La phrase $P(n, k)$ « $n + k = 3$ » est une proposition à deux variables. Par exemple, $P(2, 1)$ est vraie et $P(2, 0)$ est fausse.*
- *La phrase $P(x, A)$ « $x \in A$ » est une proposition à deux variables. Par exemple, $P(1, \mathbb{N})$ est vraie et $P(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$ est fausse.*

Définition 10
*Soient P et Q deux propositions. Si P est vraie lorsque Q est vraie et si P est fausse lorsque Q est fausse, on dit que P et Q sont **logiquement équivalentes** ou qu'elles ont la même table de vérité. On note $P \equiv Q$.*

Exemple 11 — *Soient $P(x)$ la proposition « $x > 0$ » (se lit « x strictement supérieur à 0 ») et $Q(x)$ la proposition « $-x < 0$ » (se lit « moins x strictement inférieur à 0 ») . Alors $P(x) \equiv Q(x)$.*

Définition 12
Soit E un ensemble. Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable x. On note $\{x \in E \mid P(x)\}$ (se lit « l'ensemble des x appartenant à E tels que $P(x)$ ») l'ensemble des éléments de E tels que $P(x)$ est vraie.

Exemples 13
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ *: c'est l'ensemble des nombres réels positifs.*
- $\mathbb{R}_-^* = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$ *: c'est l'ensemble des nombres réels strictement négatifs.*
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ *: c'est l'**intervalle*** \区间\ $[a, b[$ *(fermé en a, ouvert en b).*
  ($a \leq x < b$ se lit, par exemple, « x supérieur ou égal à a et strictement inférieur à b »)
- $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est pair}\} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *: c'est l'ensemble des **nombres pairs*** \偶数\.
- $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est impair}\} = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *: c'est l'ensemble des **nombres impairs*** \奇数\.

Remarque 14 — *À chaque fois que l'on écrit une phrase mathématique, il est sous-entendu qu'elle est vraie.*

1.2.2 Connecteurs logiques

À partir d'une ou plusieurs propositions, on peut construire d'autres propositions.

1.2.2.a. Négation

Soit P une proposition. La **négation** de P est la proposition $non(P)$ (aussi notée $\neg P$), qui est
- vraie lorsque P est fausse,
- fausse lorsque P est vraie.

On représente les valeurs de vérité de $non(P)$ en fonction de celles de P dans une table de vérité :

P	$non(P)$
V	F
F	V

Généralement, on remplace la proposition $non(P)$ par une proposition logiquement équivalente.

P	$non(P)$
$x > 4$ (se lit « x est strictement supérieur à 4 »)	$x \leq 4$ (se lit « x est inférieur ou égal à 4 »)
$a = 3$ (se lit « a égal 3 »)	$a \neq 3$ (se lit « a différent de 3 »)
$x \in \mathbb{N}$ (se lit « x appartient à $\mathbb{N}$ » ou « x est un entier naturel »)	$x \notin \mathbb{N}$ (se lit « x n'appartient pas à $\mathbb{N}$ » ou « x n'est pas un entier naturel »)
n est pair	n est impair
L'ensemble E a au moins deux éléments	L'ensemble E a au plus un élément
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction **croissante** \增函数\	$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas croissante
Les **droites** \直线\ $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **parallèles** \平行\	Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **sécantes** \相交/相割\.

1.2.2.b. « Ou »

Soient P et Q des propositions. La proposition « P *ou* Q » (aussi notée $P \vee Q$) est la proposition qui est

- fausse lorsque P et Q sont fausses simultanément,
- vraie dans les autres cas.

On résume cela dans une table de vérité :

P	Q	P *ou* Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemples 15

P	Q	P *ou* Q
$x \in [0,4]$	$x \in [2,8]$	$x \in [0,8]$
$x > 0$	$x = 0$	$x \geq 0$
$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$ *(se lit « x appartient à A union B »)*

1.2.2.c. « Et »

Soient P et Q des propositions. La proposition « P *et* Q » (aussi notée $P \wedge Q$) est la proposition qui est

- vraie lorsque les deux propositions sont vraies simultanément,
- fausse dans les autres cas.

On résume cela dans une table de vérité :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemples 16

P	Q	P *et* Q
$x \in [0,4]$	$x \in [2,8]$	$x \in [2,4]$
$x < 10$	$x \geq 2$	$x \in [2,10[$
$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$ *(se lit « x appartient à A inter B »)*
*ABCD est un **losange*** \菱形\	*ABCD est un **rectangle*** \矩形\	*ABCD est un **carré*** \正方形\

1.2.2.d. Quelques règles de calcul

Proposition 17
Soient P, Q et R des propositions. On a :

- $non(non\,P) \equiv P$,
- $non(P \text{ et } Q) \equiv (non\,P) \text{ ou } (non\,Q)$,
- $non(P \text{ ou } Q) \equiv (non\,P) \text{ et } (non\,Q)$,

- *P et (Q ou R) $\equiv$ (P et Q) ou (P et R),*
- *P ou (Q et R) $\equiv$ (P ou Q) et (P ou R),*
- *La proposition « P et (non P) » est toujours fausse,*
- *La proposition « P ou (non P) » est toujours vraie : soit P est vraie, soit non(P) est vraie.*

Preuve — On peut démontrer ces propriétés avec des tables de vérité. Donnons un exemple.

P	Q	P et Q	non(P et Q)	non(P)	non(Q)	non(P) ou non(Q)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Donc non(P et Q) $\equiv$ non(P) ou non(Q). □

EXEMPLE 18 — *La négation de « $x \geq 1$ et $x < 4$ » est « $x < 1$ ou $x \geq 4$ ».*

REMARQUE 19 — *Une proposition qui ne peut être que fausse s'appelle une **contradiction** \矛盾\.*

1.2.2.e. Implication

Soient P et Q des propositions. La proposition « $P \Rightarrow Q$ » (se lit « P implique Q » ou « si P, alors Q ») est la proposition qui est

- fausse lorsque P est vraie et Q est fausse,
- vraie dans les autres cas.

On résume cela dans la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

REMARQUE 20 — *Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que*

- *P est une **condition suffisante** pour Q,*
- *Q est une **condition nécessaire** pour P.*

EXEMPLES 21

- *La proposition « 2 est pair $\Rightarrow$ 3 est impair » est vraie.*
- *La proposition « 2 est impair $\Rightarrow$ 3 est pair » est vraie (même si c'est surprenant).*
- *La proposition « 2 est pair $\Rightarrow$ 3 est pair » est fausse.*
- *La proposition « 2 est impair $\Rightarrow$ 3 est impair » est vraie.*
- *La proposition « Si $x > 2$ alors $x^3 > 8$ » est vraie.*

Ainsi, lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on ne peut rien dire sur la valeur de vérité de P.

PROPOSITION 22
On a $P \Rightarrow Q \equiv$ non(P) ou Q.

Preuve — Montrons que ces deux propositions ont la même table de vérité.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	non(P)	non(P) ou Q
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

□

On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 23
La négation de la proposition « $P \Rightarrow Q$ » est « P et non(Q) ».

Preuve — $non(P \Rightarrow Q) \;\equiv\; non(non(P) \text{ ou } Q) \;\equiv P \text{ et } non(Q)$. □

EXEMPLE 24 — *Soit $x \in \mathbb{R}$. La négation de « $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ » est $x^2 = 1$ et $x \neq 1$.*

DÉFINITION 25

- *La proposition « $Q \Rightarrow P$ » s'appelle la **réciproque** de l'implication « $P \Rightarrow Q$ ».*
- *La proposition « $non(Q) \Rightarrow non(P)$ » s'appelle la **contraposée** de l'implication « $P \Rightarrow Q$ ».*

EXEMPLE 26 — *Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons la proposition « $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ »*

- *Sa contraposée est « $x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$ ».*
- *Sa réciproque est « $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ ».*

PROPOSITION 27
On a $P \Rightarrow Q \;\equiv\; (non\,Q) \Rightarrow (non P)$.

Preuve — $P \Rightarrow Q \;\equiv\; non(P) \text{ ou } Q \;\equiv\; Q \text{ ou } non(P) \;\equiv\; non(non(Q)) \text{ ou } non(P) \;\equiv\; non(Q) \Rightarrow non(P)$. □

PROPOSITION 28
Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ alors $P \Rightarrow R$.

1.2.2.f. Équivalence

Soient P et Q des propositions. La proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » (se lit « P équivalent à Q » ou « P si et seulement si Q ») est la proposition qui est

- vraie lorsque les propositions P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses,
- fausse dans les autres cas.

On résume cela dans la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

EXEMPLES 29

- *La proposition « $(1 = 1) \Leftrightarrow (0 = 0)$ » est vraie.*
- *La proposition « $(1 = 0) \Leftrightarrow (2 = 0)$ » est vraie.*
- *La proposition « $(1 = 0) \Leftrightarrow (0 = 0)$ » est fausse.*
- *Soit x un nombre réel. La proposition « $x > 2$ si et seulement si $x^3 > 8$ » est vraie.*

PROPOSITION 30
On a $P \Leftrightarrow Q \;\equiv\; (P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$.

Si la proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » est vraie, on dit que Q est une **condition nécessaire et suffisante** pour P et on dit que P et Q sont **équivalentes**.

REMARQUE 31 — *Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on peut dire que P et Q ont les mêmes valeurs de vérité et donc $P \;\equiv\; Q$.*

1.2.3 Quantificateurs \量词\

1.2.3.a. Quantificateurs universel et existentiel

Soit E un ensemble. Soit $P(x)$ une proposition dépendant de la variable x, avec $x \in E$.

Définition 32
Le ***quantificateur universel*** \全称量词\, *noté* $\forall$ (se lit « pour tout » ou « quel que soit ») *permet de définir la proposition* « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ » *qui est*

- *vraie lorsque pour tous les éléments x appartenant à E, $P(x)$ est vraie,*
- *fausse sinon (c'est-à-dire si $P(x)$ est fausse pour* ***au moins*** \至少\ *un élément x de E).*

Exemples 33

- *La proposition* « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ » *est vraie.*
- *La proposition* « $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n-3)n > 0$ » *est fausse : pour $n = 1$, $(n-3)n = -2 \leq 0$.*
- *La proposition* « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$ » *est vraie.*

Définition 34
Le ***quantificateur existentiel*** \存在量词\, *noté* $\exists$ (se lit « il existe ... tel que ») *permet de définir la proposition* « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » *qui est*

- *vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E,*
- *fausse lorsque $P(x)$ est fausse pour tous les éléments x de E.*

Remarque 35 — *« Il existe un » signifie « il existe* ***au moins*** \至少\ *un ».*

On rencontre parfois la notation « $\exists!\, x \in E,\ P(x)$ » (se lit « il existe un **unique** \唯一的\ élément x de E tel que $P(x)$ ») qui signifie qu'il existe un et un seul élément x de E vérifiant $P(x)$.

Exemples 36

- *La proposition* « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4$ » *est vraie, par exemple, pour $x = 2$ ou $x = -2$.*
- *La proposition* « $\exists\, n \in \mathbb{N},\ n^2 = 2$ » *est fausse.*
- *La proposition* « $\exists!\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) = 0$ » *est vraie : l'unique élément de $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\ln(x) = 0$ est $x = 1$.*

Remarque 37 — *Si la proposition* « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ » *est vraie alors la proposition* « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » *est vraie. Mais la proposition* « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » *peut être vraie et la proposition* « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ » *fausse. Voyons cela dans l'exemple qui suit.*

Exemples 38

- *La proposition* « $\forall\, x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ » *est fausse : par exemple, pour $x = -1$, $x<0$.*
- *La proposition* « $\exists\, x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ » *est vraie : par exemple, pour $x = 1$, $x \geq 0$.*

Les quantificateurs sont donc extrêmement importants en mathématiques. L'exemple précédent nous montre que sans précision sur la variable x, la proposition « $x \geq 0$ » n'a pas de sens.

Les symboles « $\forall$ » et « $\exists$ » ne sont pas des **abréviations** \缩写/简写\, ils ne doivent pas être utilisés dans une phrase en français.

Proposition 39
On a

- $non(\forall\, x \in E,\ P(x)) \ \equiv\ \exists\, x \in E,\ non(P(x))$,
- $non(\exists\, x \in E,\ P(x)) \ \equiv\ \forall\, x \in E,\ non(P(x))$.

Exemple 40 — *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La négation de « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ » est « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$ ».*

On peut intervertir les quantificateurs de même nature.

Proposition 41
Soit $P(x, y)$ une proposition dépendant de deux variables. On a
- $\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x, y)\ \equiv\ \forall y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x, y)$.
- $\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x, y)\ \equiv\ \exists y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x, y)$.

On ne peut pas intervertir $\forall$ et $\exists$. Par exemple, les propositions suivantes n'ont pas la même signification.
- La proposition « $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x, y)$ » signifie que pour tout $x \in E$, il existe une valeur $y \in F$ (qui dépend *a priori* de x) telle que $P(x, y)$ est vraie. On dit que y dépend de x.
- La proposition « $\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x, y)$ » signifie qu'il existe une valeur $y \in F$ telle que $P(x, y)$ est vraie pour toutes les valeurs de x dans E (c'est le même y pour tous les x).

Exemples 42
- *La proposition « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \geq y$ » signifie que tout nombre réel x est supérieur ou égal à un nombre réel y (qui dépend de x). C'est une proposition qui est vraie : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut prendre $y = x - 1$ et on a $x \geq y$.*
- *Mais la proposition « $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq y$ » signifie que tout nombre réel x est supérieur ou égal à un même nombre réel y. C'est une proposition qui est fausse.*

Proposition 43
La négation de « $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x, y)$ » est « $\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ non(P(x, y))$ ».

Exemple 44 — *La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$ » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 \leq x$ ».*

Proposition 45
On a
- $\forall x \in E,\ (P(x) \text{ et } Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ P(x)) \text{ et } (\forall x \in E,\ Q(x))$,
- $\forall x \in E,\ (P(x) \text{ ou } Q(x)) \Leftarrow (\forall x \in E,\ P(x)) \text{ ou } (\forall x \in E,\ Q(x))$,
- $\exists x \in E,\ (P(x) \text{ et } Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in E,\ P(x)) \text{ et } (\exists x \in E,\ Q(x))$,
- $\exists x \in E,\ (P(x) \text{ ou } Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E,\ P(x)) \text{ ou } (\exists x \in E,\ Q(x))$,

Pour les deuxième et troisième points, il n'y a pas équivalence comme le montrent les exemples suivants.

Exemples 46
- *La proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ (n$ est pair ou n est impair $)$ » est vraie.*
  Mais la proposition « $(\forall n \in \mathbb{N},\ n$ est pair$)$ ou $(\forall n \in \mathbb{N},\ n$ est impair$)$ » est fausse.
- *La proposition « $\exists x \in \mathbb{R},\ (\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = 0)$ » est fausse.*
  Mais la proposition « $(\exists x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = 0)$ » est vraie.
  Pour expliciter le fait que le x n'est pas le même dans la proposition « $\exists x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 0)$ » que dans la proposition « $\exists x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = 0$ », on pourra utiliser des lettres distinctes. Par exemple, on préférera la notation « $(\exists u \in \mathbb{R},\ \cos(u) = 0)$ et $(\exists v \in \mathbb{R},\ \sin(v) = 0)$ »

1.2.3.b. Variables muettes

On suppose que la variable y n'apparaît pas dans $P(x)$. Alors

- $\forall x \in E,\ P(x) \ \equiv\ \forall y \in E,\ P(y)$.
- $\exists x \in E,\ P(x) \ \equiv\ \exists y \in E,\ P(y)$.

On dit que la variable apparaissant dans la proposition est **muette** \虚拟变量/哑变量\, on peut la remplacer par n'importe quelle lettre.

Donnons d'autres exemples fréquents en mathématiques où la variable est muette.

Exemples 47

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ *(se lit « l'ensemble des x appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x est supérieur ou égal à 1 »),*
- $\lim\limits_{t \to +\infty} \exp(-t) = 0$ *(se lit « la **limite** \极限\ lorsque t tend vers $+\infty$ de exponentielle moins t est égale à 0 »),*
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k = 15$ *(se lit « la **somme** \和\ pour k allant de 1 à 5 des k est égale à 15 »),*
- $\displaystyle\prod_{i=1}^{4} i = 24$ *(se lit « le **produit** \积\ pour i allant de 1 à 4 des i est égal à 24 »),*
- $x \longmapsto x^2 + x + 1$ *(se lit « la fonction qui à x associe $x^2 + x + 1$ »),*
- *L'**équation** \方程\ $z^2 + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.*

1.3 Utilisation des quantificateurs : vocabulaire sur les fonctions

On introduit le vocabulaire à connaître sur les fonctions. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que la fonction f est	Définition	Illustration
la fonction nulle \零函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.$	
~~est~~ s'annule \互相抵销\	$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$	
positive (ou à valeurs positives) \正函数（取值都大于0）\	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$	

On dit que la fonction f est	Définition	Illustration
constante \常值函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y).$ ou $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C.$	
croissante \增函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)).$	
strictement croissante \严格单调递增\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x < y \Rightarrow f(x) < f(y)).$	
décroissante \减函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)).$	
strictement décroissante \严格单调递减\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x < y \Rightarrow f(x) > f(y)).$	
monotone \单调函数\	f est croissante ou f est décroissante	
T-périodique \周期为T的函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$	

On dit que la fonction f est	Définition	Illustration
périodique	$\exists T \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).$	
majorée \有上界\	$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M.$	
minorée \有下界\	$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x).$	
bornée \有界\	f est majorée et f est minorée.	
paire \偶函数\	$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x).$	
impaire \奇函数\	$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x).$	

1.4 Formules en mathématiques : l'exemple de la trigonométrie

En mathématiques, une **formule** \公式/计算式\ est souvent une expression à apprendre par cœur ou à retrouver très rapidement. Les formules peuvent être utilisées directement en exercices. Nous donnons dans cette partie les formules à connaître en **trigonométrie** \三角函数\. Elles seront particulièrement utilisées en physique. Un **formulaire** est un ensemble de formules.

1.4.1 Rappel : les fonctions trigonométriques

On munit le plan \平面\ d'un repère orthonormé \直角坐标系\ $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

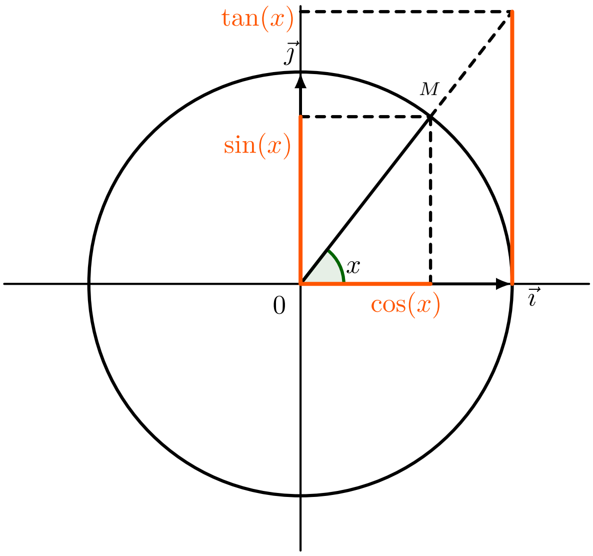
Définition 48
*Le **cercle trigonométrique** \单位元（可用于研究三角函数）\ est le **cercle** \圆\ du plan de **centre** \圆心\ $(0,0)$ et de **rayon** \半径\ 1.*

Définition 49
*Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit M le point du cercle trigonométrique tel que l'**angle** \角\ de **vecteur** \向量\ $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ est égal à x (orienté dans le sens direct).*
On note alors

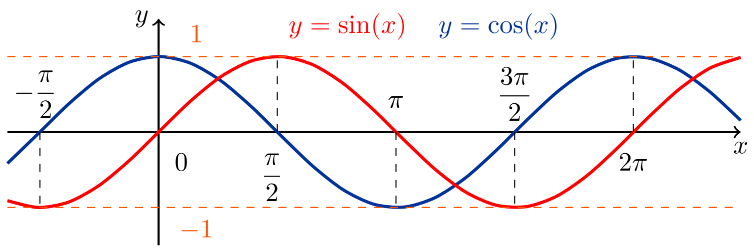
- $\cos(x)$ *l'**abscisse** \横坐标\ du point M,*
- $\sin(x)$ *l'**ordonnée** \纵坐标\ du point M.*

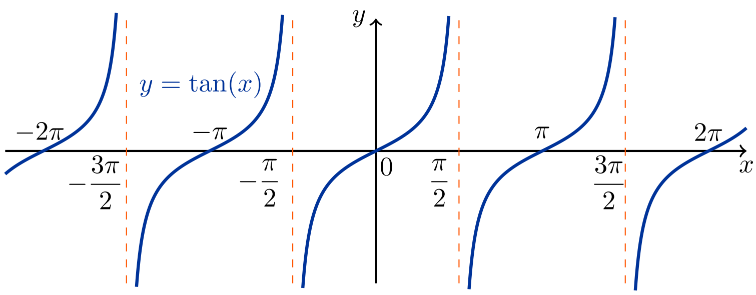
On définit ainsi les fonctions cosinus et sinus de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$.

- *La fonction **tangente** \切线\ est alors définie, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (la barre \ se lit « privé de ») , par*
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$



Les représentations graphiques sont les suivantes :





Remarque 50 — *Le cercle trigonométrique est l'ensemble des points* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $x^2 + y^2 = 1$.

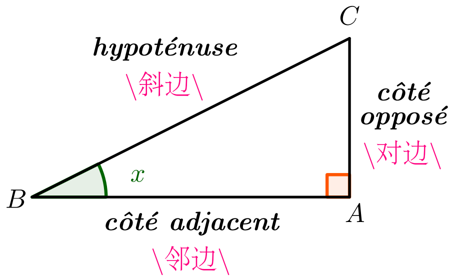
Proposition 51

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $x^2 + y^2 = 1$. *Alors il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $x = \cos(\theta)$ *et* $y = \sin(\theta)$.

Donnons une interprétation sur les triangles \三角形\.

Proposition 52
Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. *Soit* ABC *un* ***triangle rectangle*** \直角三角形\ *en* A *et tel que* $\widehat{ABC} = x$. *On a*

- $\cos(x) = \dfrac{\textit{côté adjacent}}{\textit{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{BC}$,
- $\sin(x) = \dfrac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$,
- $\tan(x) = \dfrac{\textit{côté opposé}}{\textit{côté adjacent}} = \dfrac{AC}{AB}$.



Proposition 53

- *Les fonctions* cos *et* sin *sont* 2π*-périodiques :*
  $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ *et* $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
- *La fonction* tan *est* π*-périodique :* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}, \forall k \in \mathbb{Z}$, $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$.
- *La fonction* cos *est paire :* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$.
- *La fonction* sin *est impaire :* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$.
- *La fonction* tan *est impaire :* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$, $\tan(-x) = -\tan(x)$.

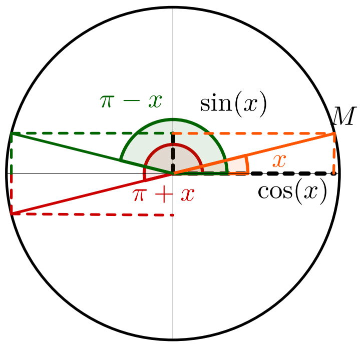
1.4.2 Formulaire

Les formules suivantes se retrouvent par lecture graphique.

Proposition 54 (Symétries \对称\)

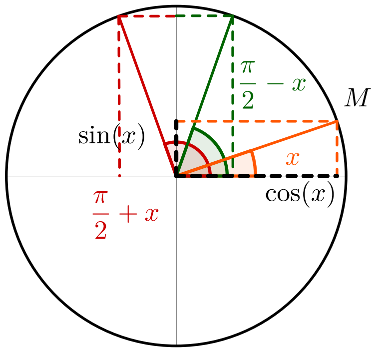
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$,
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.



Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.



REMARQUE 55 — *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x) \quad \textit{et} \quad \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x).$$

Le tableau des valeurs remarquables est le suivant (à connaître !) :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	X	0

On déduit facilement les autres valeurs par symétrie.

PROPOSITION 56 (Formules d'**addition** \加\ et de **soustraction** \减\ )

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$,
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$,
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$,
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$,
- $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$,
- $\tan(a - b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$.

Les formules suivantes s'obtiennent en prenant $a = b$ dans les formules d'addition.

PROPOSITION 57 (Formule de duplication)

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - \sin^2(a)$,
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$,
- $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$.

On en déduit alors les formules suivantes.

PROPOSITION 58 (Formules de linéarisation)

- $\cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$,
- $\sin^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$.

PROPOSITION 59 (Formules de développement (**développer** \展开\))

- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$,
- $\cos(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}(\sin(a + b) - \sin(a - b))$,
- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b))$,
- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$.

PROPOSITION 60 (Formules de factorisation (**factoriser** \因式分解\))

- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,

1.5 Méthodes de démonstration

Un **raisonnement** \论证\ mathématique est un processus permettant d'établir, à partir de propositions vraies, de nouvelles propositions, de nouveaux résultats, en utilisant des principes logiques. Dans cette partie, nous étudions différents types de raisonnement.

Lorsque l'on écrit une proposition mathématique, il est sous-entendue qu'elle est vraie. Sinon, on ne l'écrit pas.

1.5.1 Vocabulaire

- Les **définitions** \定义\ introduisent du vocabulaire nouveau.
- Un **axiome** \公理\ est une proposition dont on décide qu'elle est vraie. Il ne se démontre pas.
- À partir des axiomes, on déduit des **théorèmes** \定理\, **propositions** \命题\, **lemmes** \引理\ et **corollaires** \推论\. Les théorèmes sont les propositions qui semblent les plus importantes, les lemmes sont des propositions qui servent à démontrer les théorèmes, les corollaires sont des conséquences directes de théorèmes.
- Une **démonstration** \证明\ ou une **preuve** est un texte qui justifie que la proposition est vraie.
- Une **conjecture** \猜想\ est une proposition dont on ne sait pas encore si elle est vraie ou fausse.

Une proposition s'énonce souvent sous la forme « Si A alors B » ($A \Rightarrow B$).

- La proposition A regroupe les **hypothèses** \假设\.
- La proposition B regroupe les **conclusions** \结论\.

1.5.2 Quelques exemples de rédaction

Lorsque l'on dit « **Supposons** \假设\ P », cela signifie que l'on suppose que la proposition P est vraie.

Pour bien rédiger en mathématiques, on doit respecter certaines règles.

- On doit introduire les nouveaux objets.
  - — Pour introduire une variable x qui représente un **élément quelconque** \任意的(元素)\ d'un ensemble E, on peut écrire :
    « *Soit* $x \in E$ » ou « *Soit* x *un élément de* E ».
  - — Pour donner un nom, par exemple M, à une quantité connue ou à un objet que l'on va souvent utiliser, on peut écrire :
    « ***Posons*** \令\ $M = \ldots$ » ou « ***Notons*** \记\ $M = \ldots$ ».
    Par exemple, « *Posons* $M = \dfrac{\sqrt{2}+3}{4}$ ».
- On doit mettre des liens logiques entre les arguments, comme par exemple :
  - — « **Donc** » \因此/所以/那么\,
  - — « **D'où** »,
  - — « **Or** »,
  - — « **Par conséquent** » \所以/因此\,
  - — « **Ainsi** » \所以/因此\,
  - — « **On en déduit que** » \我们从中可以推导出...\,
  - — « **Finalement** » \总之/最后\, ...
- On peut annoncer ce que l'on va faire. Cela peut peut aider a bien clarifier l'objectif :
  « ***Montrons que*** ... \证明...\ ».

Le tableau suivant présente des exemples de rédaction selon ce que l'on doit démontrer.

À démontrer	Idée	*Exemples de rédaction*
Pour tout $x \in E$, $P(x)$. « $\forall x \in E,\ P(x)$ »	On considère un élément quelconque x de E et on montre que $P(x)$ est vraie.	*Soit $x \in E$. Montrons $P(x)$.* $\vdots$ *Donc $P(x)$.* *D'où, pour tout $x \in E$, $P(x)$.*
Il existe $x \in E$ tel que $P(x)$. « $\exists x \in E,\ P(x)$ »	En général, on donne explicitement un élément x_0 de E tel que $P(x_0)$ est vraie (*trouver la valeur du x_0 est le plus difficile*)	*Posons $x_0 = \dots$ Montrons $P(x_0)$.* $\vdots$ *Donc $P(x_0)$.* *Il existe donc $x \in E$ tel que $P(x)$.*
Unicité d'un objet vérifiant une propriété $P(x)$	On suppose qu'il en existe deux et on montre qu'ils sont égaux. (*D'autres méthodes sont possibles.*)	*Soit x et x' des éléments de E. Supposons $P(x)$ et $P(x')$.* *Montrons que $x = x'$.* $\vdots$ *Donc $x = x'$. D'où l'unicité.*
Si P alors Q. « $P \Rightarrow Q$ »	On suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie. (*Rappelons que quand P est fausse, cette implication est toujours vraie*).	*Supposons P. Montrons Q.* $\vdots$ *Donc Q.* *D'où, si P alors Q.*
P si et seulement si Q « $P \Leftrightarrow Q$ »	• Méthode 1 : On raisonne par double implication, $P \Rightarrow Q$ puis $Q \Rightarrow P$ .... • Méthode 2 : On raisonne successivement par équivalence.	*-Supposons P. Montrons Q.* $\vdots$ *Donc Q.* *-Réciproquement, supposons Q. Montrons P.* $\vdots$ *Donc P.* *-D'où, P si et seulement si Q.* .... *P si et seulement si* $\vdots$ *si et seulement si Q.*
« *P et Q* »	On montre que P est vraie et que Q est vraie.	*-Montrons P.* $\vdots$ *Donc P.* *-Montrons Q.* $\vdots$ *Donc Q.* *-D'où, P et Q.*
« *P ou Q* »	On peut montrer que « (*non* P) $\Rightarrow Q$ » est vraie.	*Supposons non(P). Montrons Q.* $\vdots$ *Donc Q.* *D'où, P ou Q.*

Rappelons que pour prouver qu'une proposition P est fausse, on peut montrer que sa négation $non(P)$ est vraie. Par exemple, pour montrer que la proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est fausse, on peut montrer que sa négation « $\exists\, x \in E,\ non(P(x))$ » est vraie. Donner un élément x_0 de E tel que $non(P(x_0))$ est vraie s'appelle un **contre-exemple** \反例\.

- La flèche « $\Rightarrow$ » ne signifie pas « donc ». En effet, dire « P est vraie donc Q est vraie » n'est pas la proposition « $P \Rightarrow Q$ » (on ne sait pas si P et Q sont vraies ou fausses). On utilise finalement les faits suivants : *P est vraie. Or $P \Rightarrow Q$ est vraie. Donc Q est vraie.*
- Lorsque l'on utilise la flèche « $\Leftrightarrow$ », il faut être sûr que le sens direct ($\Rightarrow$) et le sens réciproque ($\Leftarrow$) soient vrais.

REMARQUE 61 — *Dans un exercice, pour appliquer un théorème de la forme $A \Rightarrow B$ (« Si A alors B »), on commence donc par vérifier que A (les hypothèses) est vraie. On écrit par exemple*

« On a A. Or d'après le théorème ..., A implique B. Donc B »

Donnons des exemples de rédaction de démonstrations.

EXEMPLES 62

- ***Démontrons*** \证明\ *que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n est pair alors n^2 est pair.*
  Il s'agit de la proposition « $\forall n \in \mathbb{Z},\ (n$ est pair $\Rightarrow n^2$ est pair$)$ ».

  Preuve *: Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrons que si n est pair alors n^2 est pair.*
  Supposons n pair. Nous allons montrer que n^2 est pair.
  Par hypothèse, n est pair, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. On a donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ et $2k^2 \in \mathbb{Z}$.
  Donc n est pair.
  Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n est pair alors n^2 est pair.

- *Démontrons que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.*
  Il s'agit de la proposition « $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \big((a+b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)\big)$. »

  Preuve *: Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrons, par double implication, que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.*

  ▷ *Supposons que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Montrons que $a = 0$ ou $b = 0$.*
  Supposons $a \neq 0$. Nous allons montrer que $b = 0$.
  On sait que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et, par hypothèse, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Donc

  $$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2.$$

  Donc, $2ab = 0$, soit $ab = 0$. Or $a \neq 0$. Donc $b = 0$.
  Donc $a = 0$ ou $b = 0$.
  Donc si $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.

  ◁ *Réciproquement, supposons $a = 0$ ou $b = 0$. Montrons que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.*
  -1^{er} cas : $a = 0$. Alors

  $$(a+b)^2 = (0+b)^2 = b^2 = 0^2 + b^2 = a^2 + b^2.$$

  -2^{nd} cas : $b = 0$. Alors

  $$(a+b)^2 = (a+0)^2 = a^2 = a^2 + 0^2 = a^2 + b^2.$$

  $-$Donc, dans tous les cas, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.
  Donc si $a = 0$ ou $b = 0$ alors $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

  Donc, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.
  a et b étant quelconques, on a le résultat.

- *Démontrons que la proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2$ » est fausse.*

  Preuve *: Donnons un contre-exemple.*
  Pour $n = 3$, on a $8 = 2^3 < 3^2 = 9$. Il existe donc un entier naturel n tel que $2^n \leq n^2$. Donc la proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2$ » est fausse.

Le cours de mathématiques est constitué d'une succession de propositions. Chaque proposition est suivie d'une démonstration (ou preuve). Il peut arriver qu'une démonstration soit trop difficile ou qu'elle soit démontrée plus tard dans le cours, on dit alors que la proposition est admise et on ne fait pas de démonstration.

L'exemple qui suit peut être vu comme un extrait d'un cours de trigonométrie. Nous donnons une proposition (à connaître), suivie d'une démonstration, d'un exemple et de quelques remarques.

Exemple 63 —

Proposition 64
Soient a et b deux nombres réels non tous deux nuls. Il existe un nombre réel φ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi).$$

***Preuve** — Par hypothèse, $(a, b) \neq (0, 0)$, donc $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$. Posons $x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $y_0 = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Alors $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Il existe donc $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 = \cos(\varphi)$ et $y_0 = \sin(\varphi)$.*
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\begin{aligned} a\cos(x) + b\sin(x) &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) - \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x)\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(x_0\cos(x) - y_0\sin(x)) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos(\varphi)\cos(x) - \sin(\varphi)\sin(x)) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi). \end{aligned}$$

D'où le résultat \因此/由此我们能得到结论\. □

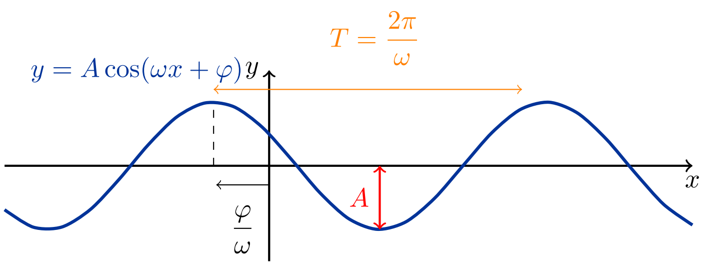
Exemple 65 — *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \cos(x) + \sin(x) &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right) \\ &= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Remarque 66 — *On pourrait démontrer de même que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe un nombre réel ψ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

En physique, un **signal sinusoïdal** \正弦信号\ est une fonction de la forme $t \longmapsto A\cos(\omega t + \varphi)$, où A, ω et φ sont des nombres réels. A est appelé **amplitude** \振幅\, ω (se lit « omega ») est appelé **pulsation** \脉冲\ et φ (se lit « phi ») est appelé **phase** \相位\.



La proposition précédente nous dit donc que la somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation ω est à nouveau un signal sinusoïdal de pulsation ω. On peut en effet réécrire la proposition 64 sous la forme :
Pour tout $(A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2$ *et tout* $\omega \in \mathbb{R}$, *il existe* $A \in \mathbb{R}$ *et* $\varphi \in \mathbb{R}$ *tel que, pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$