北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Sciences en français
Mathématiques

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

30 mars 2021

Table des matières

Chapitre 1 Introduction aux mathématiques : vocabulaire, logique et raisonnements

1.1 Exemples d'objets mathématiques

1.1.1 Ensembles et éléments

Définition 1
*Un **ensemble** \集合\ E est une collection d'objets, appelés **éléments** \元素\ de E.*

Définition 2
*On dit que x **appartient** \$x$属于$E$\ à E si x est un élément de l'ensemble E. On note $x \in E$.*

Définition 3
*Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** \$E$包含于$F$\ dans F si tout élément de E est aussi élément de F. On note $E \subset F$. On dit que E est un **sous-ensemble** (ou une **partie**) de F.*

On travaillera avec les ensembles de nombres suivants :

Ensemble	*Notation*	*Exemples d'éléments*
Nombres entiers naturels \自然数\	$\mathbb{N}$	$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$
Nombres entiers relatifs \整数\	$\mathbb{Z}$	$\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
Nombres rationnels \有理数\	$\mathbb{Q}$	$\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*$
Nombres réels \实数\	$\mathbb{R}$	$1,\ -3,\ \frac{1}{2},\ \sqrt{2},\ \pi,\ \ldots$
Nombres complexes \复数\	$\mathbb{C}$	$a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

Ces ensembles privés de 0 sont notés $\mathbb{N}^*$ (se lit « $\mathbb{N}$ étoile ») , $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$.

Exemples 4 *Donnons des exemples d'**inclusions**.*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Nous rencontrerons également les ensembles de nombres suivants.

- L'ensemble des **nombres réels positifs** (≥ 0 (se lit « supérieur ou égal à 0 »)) est noté $\mathbb{R}_+$ (se lit « $\mathbb{R}$ plus ») .
- L'ensemble des **nombres réels strictement positifs** (> 0 (se lit « strictement supérieur à 0 »)) est noté $\mathbb{R}_+^*$ (se lit « $\mathbb{R}$ plus étoile ») .
- L'ensemble des **nombres réels négatifs** (≤ 0 (se lit « inférieur ou égal à 0 »)) est noté $\mathbb{R}_-$ (se lit « $\mathbb{R}$ moins ») .
- L'ensemble des **nombres réels strictement négatifs** (< 0 (se lit « strictement inférieur à 0 »)) est noté $\mathbb{R}_-^*$ (se lit « $\mathbb{R}$ moins étoile ») .

1.1.2 Fonctions

Définition 5

Soient E et F deux ensembles. Une ***fonction*** *(ou application)* \函数\ *de E vers F est un objet qui à tout élément x de E associe un et un seul élément y de F, noté $f(x)$ (se lit « f de x »).*

On note $f : E \longrightarrow F$ pour signifier que f est une application de E dans F.

- E est appelé **l'ensemble de définition** \定义域\ de f,
- F est appelé **l'ensemble d'arrivée** \值域\ de f,
- $f(x)$ est appelé **l'image** \象\ de x par f,

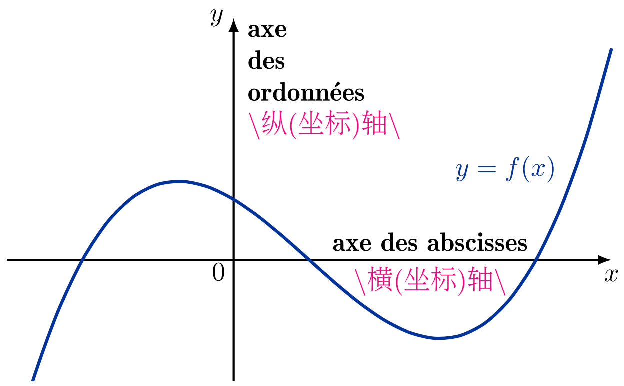
On peut préciser les images avec la notation

$$f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array},$$

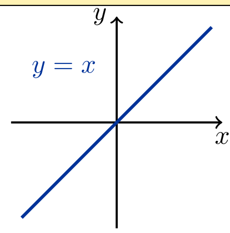
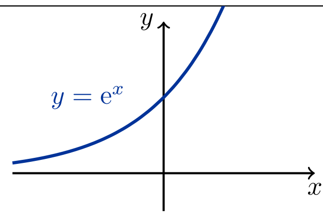
(« la fonction f de E dans F qui à x associe f de x » ou « la fonction f de E dans F, à x on associe f de x »).

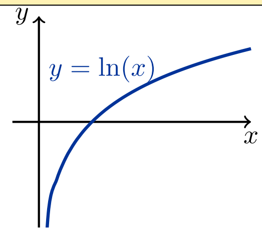
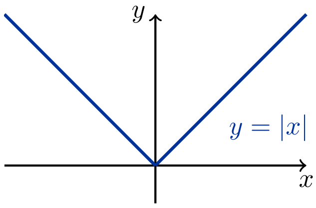
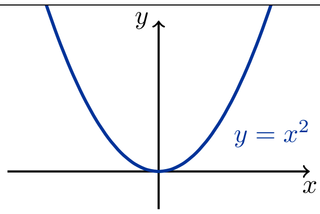
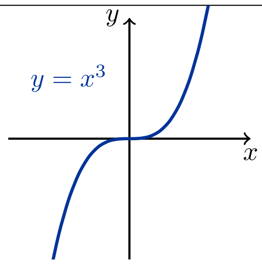
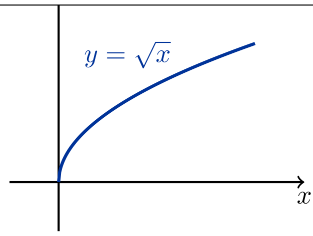
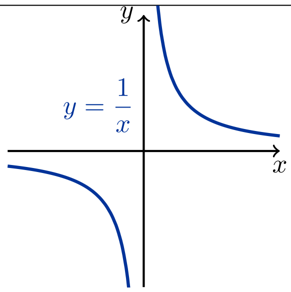
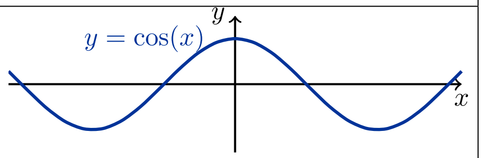
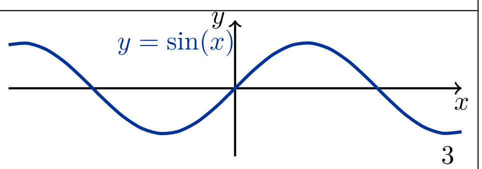
Définition 6

La ***représentation graphique*** \图象\ *d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou courbe représentative) est l'ensemble des* ***points*** \点\ *de* ***coordonnées*** \坐标\ *$(x, f(x))$, où $x \in I$.*



Donnons des exemples de fonctions usuelles.

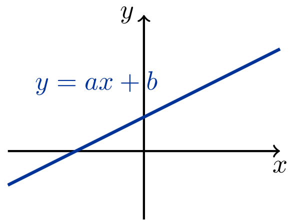
Nom de la fonction	*Notation*	*Représentation graphique*
Identité \恒同\	$\mathrm{id} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$	
Exponentielle \指数函数\	$\exp : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$ $\exp(x)$: « exponentielle x »	

Nom de la fonction	*Notation*	*Représentation graphique*
Logarithme (népérien) \对数函数\	$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$ $\ln(x)$: « ln de x »	
Valeur absolue	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$ $\|x\|$: « valeur absolue de x »	
Carré \平方\	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ x^2 : « x au carré »	
Cube \立方\	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ x^3 : « x au cube » ou « x puissance 3 »	
Racine carrée \平方根\	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ $\sqrt{x}$: « racine carrée de x »	
Inverse \反比例函数/倒数\	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ $\dfrac{1}{x}$: « 1 sur x »	
Cosinus \余弦\	$\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$ $\cos(x)$: « cosinus x »	
Sinus \正弦\	$\sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$ $\sin(x)$: « sinus x »	

Les fonctions **affines** sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array},$$

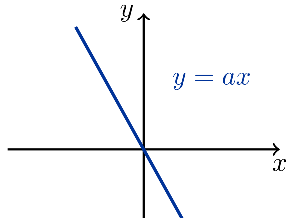
où a, $b \in \mathbb{R}$.



Dans le cas où $b = 0$, on parle de fonctions **linéaires**.
Ce sont donc les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array},$$

où $a \in \mathbb{R}$.



1.2 Quelques éléments de logique

1.2.1 Variables et propositions mathématiques

Définition 7
*Une **proposition** \命题\ (ou assertion) est une phrase mathématique qui est soit **vraie** \真\ (noté V), soit **fausse** \错误\ (noté F).*

Exemples 8

- « $1 + 1 = 2$ » (se lit « 1 plus 1 égal 2 ») *est une proposition, qui est vraie.*
- « $5 \times 2 = 4$ » (se lit « 5 fois 2 égal 4 ») *est une proposition, qui est fausse.*

En mathématiques, on utilise des **variables** \变量\. Il s'agit presque toujours de lettres (x, y, a, b, n, …) parfois indicées (x_1, x_2, …). C'est un nom d'objet, qui ne désigne pas un objet particulier mais des objets appartenant à un certain ensemble.

Souvent, une proposition dépend d'une ou plusieurs variables. Sa **valeur de vérité** (vraie ou fausse) peut alors être donnée lorsque l'on précise les **valeurs** \值\ des variables. En général, on note $P(x)$ une proposition qui dépend de la variable est x.

Exemples 9

- *La phrase $P(x)$ « $x + 1 = 2$ » est une proposition à une variable. Par exemple, $P(1)$ est vraie et $P(2)$ est fausse.*
- *La phrase $P(n, k)$ « $n + k = 3$ » est une proposition à deux variables. Par exemple, $P(2, 1)$ est vraie et $P(2, 0)$ est fausse.*
- *La phrase $P(x, A)$ « $x \in A$ » est une proposition à deux variables. Par exemple, $P(1, \mathbb{N})$ est vraie et $P(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$ est fausse.*

Définition 10
*Soient P et Q deux propositions. Si P est vraie lorsque Q est vraie et si P est fausse lorsque Q est fausse, on dit que P et Q sont **logiquement équivalentes** ou qu'elles ont la même table de vérité. On note $P \equiv Q$.*

Exemple 11 — *Soient $P(x)$ la proposition « $x > 0$ »* (se lit « x strictement supérieur à 0 ») *et $Q(x)$ la proposition « $-x < 0$ »* (se lit « moins x strictement inférieur à 0 ») *. Alors $P(x) \equiv Q(x)$.*

Définition 12
Soit E un ensemble. Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable x. On note $\{x \in E \mid P(x)\}$ (se lit « l'ensemble des x appartenant à E tels que $P(x)$ ») l'ensemble des éléments de E tels que $P(x)$ est vraie.

Exemples 13
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ *: c'est l'ensemble des nombres réels positifs.*
- $\mathbb{R}_-^* = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$ *: c'est l'ensemble des nombres réels strictement négatifs.*
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ *: c'est l'**intervalle*** \区间\ $[a, b[$ *(fermé en a, ouvert en b).*
  ($a \leq x < b$ se lit, par exemple, « x supérieur ou égal à a et strictement inférieur à b »)
- $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est pair}\} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *: c'est l'ensemble des **nombres pairs*** \偶数\.
- $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est impair}\} = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *: c'est l'ensemble des **nombres impairs*** \奇数\.

Remarque 14 — *À chaque fois que l'on écrit une phrase mathématique, il est sous-entendu qu'elle est vraie.*

1.2.2 Connecteurs logiques

À partir d'une ou plusieurs propositions, on peut construire d'autres propositions.

1.2.2.a. Négation

Soit P une proposition. La **négation** de P est la proposition $non(P)$ (aussi notée $\neg P$), qui est
- vraie lorsque P est fausse,
- fausse lorsque P est vraie.

On représente les valeurs de vérité de $non(P)$ en fonction de celles de P dans une table de vérité :

P	$non(P)$
V	F
F	V

Généralement, on remplace la proposition $non(P)$ par une proposition logiquement équivalente.

P	$non(P)$
$x > 4$ (se lit « x est strictement supérieur à 4 »)	$x \leq 4$ (se lit « x est inférieur ou égal à 4 »)
$a = 3$ (se lit « a égal 3 »)	$a \neq 3$ (se lit « a différent de 3 »)
$x \in \mathbb{N}$ (se lit « x appartient à $\mathbb{N}$ » ou « x est un entier naturel »)	$x \notin \mathbb{N}$ (se lit « x n'appartient pas à $\mathbb{N}$ » ou « x n'est pas un entier naturel »)
n est pair	n est impair
L'ensemble E a au moins deux éléments	L'ensemble E a au plus un élément
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction **croissante** \增函数\	$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas croissante
Les **droites** \直线\ $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **parallèles** \平行\	Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **sécantes** \相交/相割\.

1.2.2.b. « Ou »

Soient P et Q des propositions. La proposition « P *ou* Q » (aussi notée $P \vee Q$) est la proposition qui est

- fausse lorsque P et Q sont fausses simultanément,
- vraie dans les autres cas.

On résume cela dans une table de vérité :

P	Q	P *ou* Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EXEMPLES 15

P	Q	P *ou* Q
$x \in [0,4]$	$x \in [2,8]$	$x \in [0,8]$
$x > 0$	$x = 0$	$x \geq 0$
$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$ *(se lit « x appartient à A union B »)*

1.2.2.c. « Et »

Soient P et Q des propositions. La proposition « P *et* Q » (aussi notée $P \wedge Q$) est la proposition qui est

- vraie lorsque les deux propositions sont vraies simultanément,
- fausse dans les autres cas.

On résume cela dans une table de vérité :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

EXEMPLES 16

P	Q	P *et* Q
$x \in [0,4]$	$x \in [2,8]$	$x \in [2,4]$
$x < 10$	$x \geq 2$	$x \in [2,10[$
$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$ *(se lit « x appartient à A inter B »)*
*$ABCD$ est un **losange*** \菱形\	*$ABCD$ est un **rectangle*** \矩形\	*$ABCD$ est un **carré*** \正方形\

1.2.2.d. Quelques règles de calcul

PROPOSITION 17
Soient P, Q et R des propositions. On a :

- $non(non\,P) \equiv P$,
- $non(P\ et\ Q) \equiv (non\,P)\ ou\ (non\,Q)$,
- $non(P\ ou\ Q) \equiv (non\,P)\ et\ (non\,Q)$,

- *P et (Q ou R) $\equiv$ (P et Q) ou (P et R),*
- *P ou (Q et R) $\equiv$ (P ou Q) et (P ou R),*
- *La proposition « P et (non P) » est toujours fausse,*
- *La proposition « P ou (non P) » est toujours vraie : soit P est vraie, soit non(P) est vraie.*

Preuve — On peut démontrer ces propriétés avec des tables de vérité. Donnons un exemple.

P	Q	P et Q	non(P et Q)	non(P)	non(Q)	non(P) ou non(Q)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Donc *non(P et Q) $\equiv$ non(P) ou non(Q)*. □

Exemple 18 — *La négation de « $x \geq 1$ et $x < 4$ » est « $x < 1$ ou $x \geq 4$ ».*

Remarque 19 — *Une proposition qui ne peut être que fausse s'appelle une* ***contradiction*** \矛盾\.

1.2.2.e. Implication

Soient P et Q des propositions. La proposition « $P \Rightarrow Q$ » (se lit « P implique Q » ou « si P, alors Q ») est la proposition qui est

- fausse lorsque P est vraie et Q est fausse,
- vraie dans les autres cas.

On résume cela dans la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque 20 — *Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que*

- *P est une* ***condition suffisante*** *pour Q,*
- *Q est une* ***condition nécessaire*** *pour P.*

Exemples 21

- *La proposition « 2 est pair $\Rightarrow$ 3 est impair » est vraie.*
- *La proposition « 2 est impair $\Rightarrow$ 3 est pair » est vraie (même si c'est surprenant).*
- *La proposition « 2 est pair $\Rightarrow$ 3 est pair » est fausse.*
- *La proposition « 2 est impair $\Rightarrow$ 3 est impair » est vraie.*
- *La proposition « Si $x > 2$ alors $x^3 > 8$ » est vraie.*

Ainsi, lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on ne peut rien dire sur la valeur de vérité de P.

Proposition 22
On a $P \Rightarrow Q \equiv$ non(P) ou Q.

Preuve — Montrons que ces deux propositions ont la même table de vérité.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	non(P)	non(P) ou Q
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

□

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 23
La négation de la proposition « $P \Rightarrow Q$ » est « P et non(Q) ».

Preuve — *non$(P \Rightarrow Q) \equiv$ non(non(P) ou $Q) \equiv P$ et non(Q).* □

Exemple 24 — *Soit $x \in \mathbb{R}$. La négation de « $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ » est $x^2 = 1$ et $x \neq 1$.*

Définition 25

- *La proposition « $Q \Rightarrow P$ » s'appelle la* ***réciproque*** *de l'implication « $P \Rightarrow Q$ ».*
- *La proposition « non$(Q) \Rightarrow$ non(P) » s'appelle la* ***contraposée*** *de l'implication « $P \Rightarrow Q$ ».*

Exemple 26 — *Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons la proposition « $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ »*

- *Sa contraposée est « $x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$ ».*
- *Sa réciproque est « $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ ».*

Proposition 27
On a $P \Rightarrow Q \equiv$ (non $Q) \Rightarrow$ (non$P$).

Preuve — *$P \Rightarrow Q \equiv$ non(P) ou $Q \equiv Q$ ou non$(P) \equiv$ non(non(Q)) ou non$(P) \equiv$ non$(Q) \Rightarrow$ non(P).* □

Proposition 28
Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ alors $P \Rightarrow R$.

1.2.2.f. Équivalence

Soient P et Q des propositions. La proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » (se lit « P équivalent à Q » ou « P si et seulement si Q ») est la proposition qui est

- vraie lorsque les propositions P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses,
- fausse dans les autres cas.

On résume cela dans la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemples 29

- *La proposition « $(1 = 1) \Leftrightarrow (0 = 0)$ » est vraie.*
- *La proposition « $(1 = 0) \Leftrightarrow (2 = 0)$ » est vraie.*
- *La proposition « $(1 = 0) \Leftrightarrow (0 = 0)$ » est fausse.*
- *Soit x un nombre réel. La proposition « $x > 2$ si et seulement si $x^3 > 8$ » est vraie.*

Proposition 30
On a $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$.

Si la proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » est vraie, on dit que Q est une **condition nécessaire et suffisante** pour P et on dit que P et Q sont **équivalentes**.

Remarque 31 — *Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on peut dire que P et Q ont les mêmes valeurs de vérité et donc $P \equiv Q$.*

1.2.3 Quantificateurs \量词\

1.2.3.a. Quantificateurs universel et existentiel

Soit E un ensemble. Soit $P(x)$ une proposition dépendant de la variable x, avec $x \in E$.

Définition 32
*Le **quantificateur universel** \全称量词\, noté $\forall$ (se lit « pour tout » ou « quel que soit ») permet de définir la proposition « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ » qui est*

- *vraie lorsque pour tous les éléments x appartenant à E, $P(x)$ est vraie,*
- *fausse sinon (c'est-à-dire si $P(x)$ est fausse pour **au moins** \至少\ un élément x de E).*

Exemples 33

- *La proposition « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ » est vraie.*
- *La proposition « $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n-3)n > 0$ » est fausse : pour $n = 1$, $(n-3)n = -2 \leq 0$.*
- *La proposition « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$ » est vraie.*

Définition 34
*Le **quantificateur existentiel** \存在量词\, noté $\exists$ (se lit « il existe ... tel que ») permet de définir la proposition « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » qui est*

- *vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E,*
- *fausse lorsque $P(x)$ est fausse pour tous les éléments x de E.*

Remarque 35 — *« Il existe un » signifie « il existe **au moins** \至少\ un ».*

On rencontre parfois la notation « $\exists!\, x \in E,\ P(x)$ » (se lit « il existe un **unique** \唯一的\ élément x de E tel que $P(x)$ ») qui signifie qu'il existe un et un seul élément x de E vérifiant $P(x)$.

Exemples 36

- *La proposition « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4$ » est vraie, par exemple, pour $x = 2$ ou $x = -2$.*
- *La proposition « $\exists\, n \in \mathbb{N},\ n^2 = 2$ » est fausse.*
- *La proposition « $\exists!\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) = 0$ » est vraie : l'unique élément de $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\ln(x) = 0$ est $x = 1$.*

Remarque 37 — *Si la proposition « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ » est vraie alors la proposition « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » est vraie. Mais la proposition « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » peut être vraie et la proposition « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ » fausse. Voyons cela dans l'exemple qui suit.*

Exemples 38

- *La proposition « $\forall\, x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ » est fausse : par exemple, pour $x = -1$, $x<0$.*
- *La proposition « $\exists\, x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ » est vraie : par exemple, pour $x = 1$, $x\geq 0$.*

Les quantificateurs sont donc extrêmement importants en mathématiques. L'exemple précédent nous montre que sans précision sur la variable x, la proposition « $x \geq 0$ » n'a pas de sens.

Les symboles « $\forall$ » et « $\exists$ » ne sont pas des **abréviations** \缩写/简写\, ils ne doivent pas être utilisés dans une phrase en français.

Proposition 39
On a

- *non*$(\forall\, x \in E,\ P(x)) \equiv \exists\, x \in E,\ $*non*$(P(x))$,
- *non*$(\exists\, x \in E,\ P(x)) \equiv \forall\, x \in E,\ $*non*$(P(x))$.

Exemple 40 — *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La négation de « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ » est « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$ ».*

On peut intervertir les quantificateurs de même nature.

Proposition 41
Soit $P(x, y)$ une proposition dépendant de deux variables. On a
- $\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in F,\ P(x, y)\ \equiv\ \forall\, y \in F,\ \forall\, x \in E,\ P(x, y).$
- $\exists\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x, y)\ \equiv\ \exists\, y \in F,\ \exists\, x \in E,\ P(x, y).$

On ne peut pas intervertir $\forall$ et $\exists$. Par exemple, les propositions suivantes n'ont pas la même signification.
- La proposition « $\forall\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x, y)$ » signifie que pour tout $x \in E$, il existe une valeur $y \in F$ (qui dépend *a priori* de x) telle que $P(x, y)$ est vraie. On dit que y dépend de x.
- La proposition « $\exists\, y \in F,\ \forall\, x \in E,\ P(x, y)$ » signifie qu'il existe une valeur $y \in F$ telle que $P(x, y)$ est vraie pour toutes les valeurs de x dans E (c'est le même y pour tous les x).

Exemples 42
- *La proposition « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ x \geq y$ » signifie que tout nombre réel x est supérieur ou égal à un nombre réel y (qui dépend de x). C'est une proposition qui est vraie : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut prendre $y = x - 1$ et on a $x \geq y$.*
- *Mais la proposition « $\exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x \geq y$ » signifie que tout nombre réel x est supérieur ou égal à un même nombre réel y. C'est une proposition qui est fausse.*

Proposition 43
La négation de « $\forall\, x \in E,\ \exists\, y \in F,\ P(x, y)$ » est « $\exists\, x \in E,\ \forall\, y \in F,\ non(P(x, y))$ ».

Exemple 44 — *La négation de « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$ » est « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ y^2 \leq x$ ».*

Proposition 45
On a
- $\forall\, x \in E,\ (P(x)\ et\ Q(x)) \Leftrightarrow (\forall\, x \in E,\ P(x))\ et\ (\forall\, x \in E,\ Q(x)),$
- $\forall\, x \in E,\ (P(x)\ ou\ Q(x)) \Leftarrow (\forall\, x \in E,\ P(x))\ ou\ (\forall\, x \in E,\ Q(x)),$
- $\exists\, x \in E,\ (P(x)\ et\ Q(x)) \Rightarrow (\exists\, x \in E,\ P(x))\ et\ (\exists\, x \in E,\ Q(x)),$
- $\exists\, x \in E,\ (P(x)\ ou\ Q(x)) \Leftrightarrow (\exists\, x \in E,\ P(x))\ ou\ (\exists\, x \in E,\ Q(x)),$

Pour les deuxième et troisième points, il n'y a pas équivalence comme le montrent les exemples suivants.

Exemples 46
- *La proposition « $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n$ est pair ou n est impair $)$ » est vraie.*
  Mais la proposition « $(\forall\, n \in \mathbb{N},\ n$ est pair$)$ ou $(\forall\, n \in \mathbb{N},\ n$ est impair$)$ » est fausse.
- *La proposition « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ (\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = 0)$ » est fausse.*
  Mais la proposition « $(\exists\, x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 0)$ et $(\exists\, x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = 0)$ » est vraie.
  Pour expliciter le fait que le x n'est pas le même dans la proposition « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 0)$ » que dans la proposition « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = 0$ », on pourra utiliser des lettres distinctes. Par exemple, on préférera la notation « $(\exists\, u \in \mathbb{R},\ \cos(u) = 0)$ et $(\exists\, v \in \mathbb{R},\ \sin(v) = 0)$ »

1.2.3.b. Variables muettes

On suppose que la variable y n'apparaît pas dans $P(x)$. Alors

- $\forall x \in E,\ P(x) \ \equiv\ \forall y \in E,\ P(y)$.
- $\exists x \in E,\ P(x) \ \equiv\ \exists y \in E,\ P(y)$.

On dit que la variable apparaissant dans la proposition est **muette** \虚拟变量/哑变量\, on peut la remplacer par n'importe quelle lettre.

Donnons d'autres exemples fréquents en mathématiques où la variable est muette.

Exemples 47

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ *(se lit « l'ensemble des x appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x est supérieur ou égal à 1 »),*
- $\lim\limits_{t \to +\infty} \exp(-t) = 0$ *(se lit « la **limite** \极限\ lorsque t tend vers $+\infty$ de exponentielle moins t est égale à 0 »),*
- $\sum\limits_{k=1}^{5} k = 15$ *(se lit « la **somme** \和\ pour k allant de 1 à 5 des k est égale à 15 »),*
- $\prod\limits_{i=1}^{4} i = 24$ *(se lit « le **produit** \积\ pour i allant de 1 à 4 des i est égal à 24 »),*
- $x \longmapsto x^2 + x + 1$ *(se lit « la fonction qui à x associe $x^2 + x + 1$ »),*
- *L'**équation** \方程\ $z^2 + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.*

1.3 Utilisation des quantificateurs : vocabulaire sur les fonctions

On introduit le vocabulaire à connaître sur les fonctions. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que la fonction f est	Définition	Illustration
la fonction nulle \零函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.$	
~~est~~ s'annule \互相抵销\	$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$	
positive (ou à valeurs positives) \正函数（取值都大于0）\	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$	

On dit que la fonction f est	Définition	Illustration
constante \常值函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y).$ ou $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C.$	
croissante \增函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)).$	
strictement croissante \严格单调递增\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x < y \Rightarrow f(x) < f(y)).$	
décroissante \减函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)).$	
strictement décroissante \严格单调递减\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x < y \Rightarrow f(x) > f(y)).$	
monotone \单调函数\	f est croissante ou f est décroissante	
T-périodique \周期为T的函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$	

On dit que la fonction f est	Définition	Illustration
périodique	$\exists\, T \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$	
majorée \有上界\	$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M.$	
minorée \有下界\	$\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ m \leq f(x).$	
bornée \有界\	f est majorée et f est minorée.	
paire \偶函数\	$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x).$	
impaire \奇函数\	$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x).$	

1.4 Formules en mathématiques : l'exemple de la trigonométrie

En mathématiques, une **formule** \公式/计算式\ est souvent une expression à apprendre par cœur ou à retrouver très rapidement. Les formules peuvent être utilisées directement en exercices. Nous donnons dans cette partie les formules à connaître en **trigonométrie** \三角函数\. Elles seront particulièrement utilisées en physique. Un **formulaire** est un ensemble de formules.

1.4.1 Rappel : les fonctions trigonométriques

On munit le plan \平面\ d'un repère orthonormé \直角坐标系\ $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Définition 48
Le ***cercle trigonométrique*** \单位元（可用于研究三角函数）\ *est le* ***cercle*** \圆\ *du plan de* ***centre*** \圆心\ $(0, 0)$ *et de* ***rayon*** \半径\ 1.

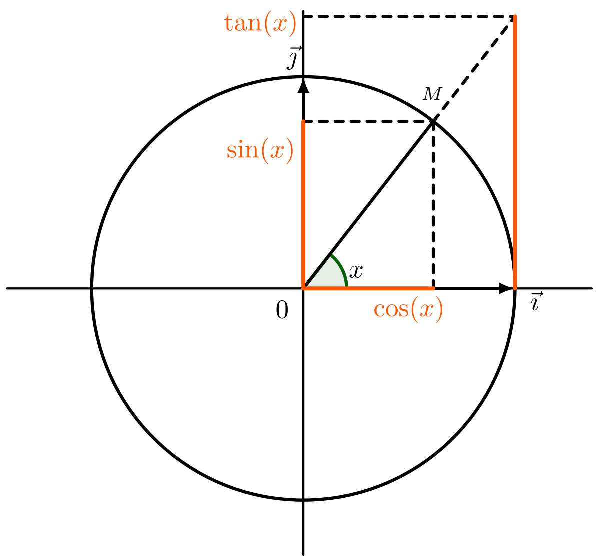
Définition 49
*Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit M le point du cercle trigonométrique tel que l'****angle*** \角\ *de* ***vecteur*** \向量\ $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ *est égal à x (orienté dans le sens direct).*
On note alors

- $\cos(x)$ *l'****abscisse*** \横坐标\ *du point M,*
- $\sin(x)$ *l'****ordonnée*** \纵坐标\ *du point M.*

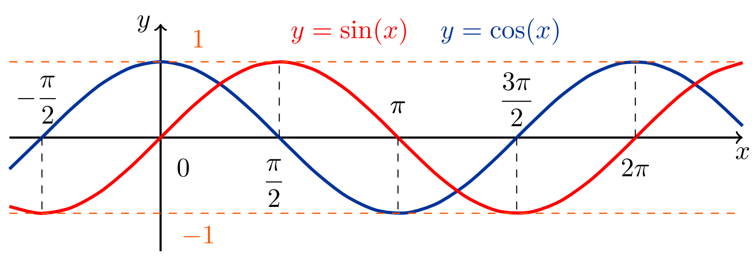
On définit ainsi les fonctions cosinus et sinus de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$.

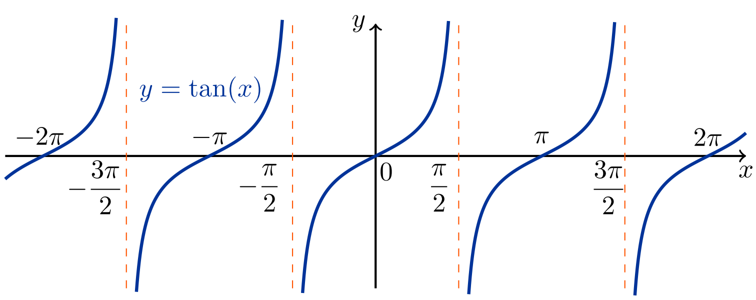
- *La fonction* ***tangente*** \切线\ *est alors définie, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (la barre \ se lit « privé de ») , par*

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$



Les représentations graphiques sont les suivantes :





Remarque 50 — *Le cercle trigonométrique est l'ensemble des points* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $x^2 + y^2 = 1$.

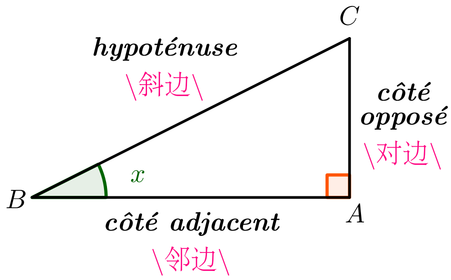
Proposition 51

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $x^2 + y^2 = 1$. *Alors il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $x = \cos(\theta)$ *et* $y = \sin(\theta)$.

Donnons une interprétation sur les triangles \三角形\.

Proposition 52
Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. *Soit* ABC *un* ***triangle rectangle*** \直角三角形\ *en* A *et tel que* $\widehat{ABC} = x$. *On a*

- $\cos(x) = \dfrac{\textit{côté adjacent}}{\textit{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{BC}$,
- $\sin(x) = \dfrac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$,
- $\tan(x) = \dfrac{\textit{côté opposé}}{\textit{côté adjacent}} = \dfrac{AC}{AB}$.



Proposition 53

- *Les fonctions* cos *et* sin *sont* 2π*-périodiques :*
  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ *et* $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
- *La fonction* tan *est* π*-périodique :* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}, \forall k \in \mathbb{Z}, \tan(x + k\pi) = \tan(x)$.
- *La fonction* cos *est paire :* $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$.
- *La fonction* sin *est impaire :* $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$.
- *La fonction* tan *est impaire :* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}, \tan(-x) = -\tan(x)$.

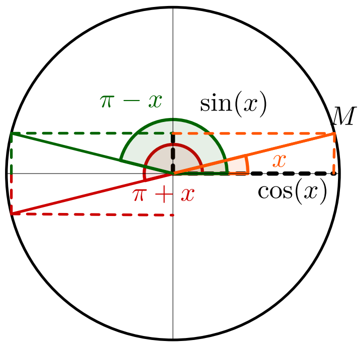
1.4.2 Formulaire

Les formules suivantes se retrouvent par lecture graphique.

Proposition 54 (Symétries \对称\)

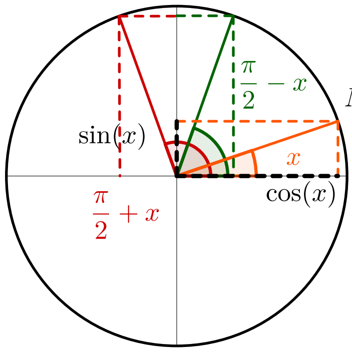
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$,
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.



Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.



Remarque 55 — *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x) \quad \textit{et} \quad \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x).$$

Le tableau des valeurs remarquables est le suivant (à connaître !) :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	X	0

On déduit facilement les autres valeurs par symétrie.

Proposition 56 (Formules d'**addition** \加\ et de **soustraction** \减\ )

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$,
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$,
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$,
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$,
- $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$,
- $\tan(a - b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$.

Les formules suivantes s'obtiennent en prenant $a = b$ dans les formules d'addition.

Proposition 57 (Formule de duplication)

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - \sin^2(a)$,
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$,
- $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$.

On en déduit alors les formules suivantes.

Proposition 58 (Formules de linéarisation)

- $\cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$,
- $\sin^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$.

Proposition 59 (Formules de développement (**développer** \展开\))

- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$,
- $\cos(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}(\sin(a + b) - \sin(a - b))$,
- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b))$,
- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$.

Proposition 60 (Formules de factorisation (**factoriser** \因式分解\))

- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$,

1.5 Méthodes de démonstration

Un **raisonnement** \论证\ mathématique est un processus permettant d'établir, à partir de propositions vraies, de nouvelles propositions, de nouveaux résultats, en utilisant des principes logiques. Dans cette partie, nous étudions différents types de raisonnement.

Lorsque l'on écrit une proposition mathématique, il est sous-entendue qu'elle est vraie. Sinon, on ne l'écrit pas.

1.5.1 Vocabulaire

- Les **définitions** \定义\ introduisent du vocabulaire nouveau.
- Un **axiome** \公理\ est une proposition dont on décide qu'elle est vraie. Il ne se démontre pas.
- À partir des axiomes, on déduit des **théorèmes** \定理\, **propositions** \命题\, **lemmes** \引理\ et **corollaires** \推论\. Les théorèmes sont les propositions qui semblent les plus importantes, les lemmes sont des propositions qui servent à démontrer les théorèmes, les corollaires sont des conséquences directes de théorèmes.
- Une **démonstration** \证明\ ou une **preuve** est un texte qui justifie que la proposition est vraie.
- Une **conjecture** \猜想\ est une proposition dont on ne sait pas encore si elle est vraie ou fausse.

Une proposition s'énonce souvent sous la forme « Si A alors B » ($A \Rightarrow B$).

- La proposition A regroupe les **hypothèses** \假设\.
- La proposition B regroupe les **conclusions** \结论\.

1.5.2 Quelques exemples de rédaction

Lorsque l'on dit « **Supposons** \假设\ P », cela signifie que l'on suppose que la proposition P est vraie.

Pour bien rédiger en mathématiques, on doit respecter certaines règles.

- On doit introduire les nouveaux objets.
  - Pour introduire une variable x qui représente un **élément quelconque** \任意的(元素)\ d'un ensemble E, on peut écrire :
    « *Soit* $x \in E$ » ou « *Soit x un élément de E* ».
  - Pour donner un nom, par exemple M, à une quantité connue ou à un objet que l'on va souvent utiliser, on peut écrire :
    « ***Posons*** \令\ $M = \ldots$ » ou « ***Notons*** \记\ $M = \ldots$ ».
    Par exemple, « *Posons* $M = \dfrac{\sqrt{2}+3}{4}$ ».
- On doit mettre des liens logiques entre les arguments, comme par exemple :
  - « **Donc** » \因此/所以/那么\,
  - « **D'où** »,
  - « **Or** »,
  - « **Par conséquent** » \所以/因此\,
  - « **Ainsi** » \所以/因此\,
  - « **On en déduit que** » \我们从中可以推导出...\,
  - « **Finalement** » \总之/最后\, ...
- On peut annoncer ce que l'on va faire. Cela peut peut aider a bien clarifier l'objectif :
  « ***Montrons que*** ... \证明...\ ».

Le tableau suivant présente des exemples de rédaction selon ce que l'on doit démontrer.

À démontrer	Idée	*Exemples de rédaction*
Pour tout $x \in E$, $P(x)$. « $\forall x \in E,\ P(x)$ »	On considère un élément quelconque x de E et on montre que $P(x)$ est vraie.	*Soit $x \in E$. Montrons $P(x)$.* $\vdots$ *Donc $P(x)$.* *D'où, pour tout $x \in E$, $P(x)$.*
Il existe $x \in E$ tel que $P(x)$. « $\exists x \in E,\ P(x)$ »	En général, on donne explicitement un élément x_0 de E tel que $P(x_0)$ est vraie (*trouver la valeur du x_0 est le plus difficile*)	*Posons $x_0 = \dots$ Montrons $P(x_0)$.* $\vdots$ *Donc $P(x_0)$.* *Il existe donc $x \in E$ tel que $P(x)$.*
Unicité d'un objet vérifiant une propriété $P(x)$	On suppose qu'il en existe deux et on montre qu'ils sont égaux. (*D'autres méthodes sont possibles.*)	*Soit x et x' des éléments de E. Supposons $P(x)$ et $P(x')$.* *Montrons que $x = x'$.* $\vdots$ *Donc $x = x'$. D'où l'unicité.*
Si P alors Q. « $P \Rightarrow Q$ »	On suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie. (*Rappelons que quand P est fausse, cette implication est toujours vraie*).	*Supposons P. Montrons Q.* $\vdots$ *Donc Q.* *D'où, si P alors Q.*
P si et seulement si Q « $P \Leftrightarrow Q$ »	• Méthode 1 : On raisonne par double implication, $P \Rightarrow Q$ puis $Q \Rightarrow P$ .... • Méthode 2 : On raisonne successivement par équivalence.	*-Supposons P. Montrons Q.* $\vdots$ *Donc Q.* *-Réciproquement, supposons Q. Montrons P.* $\vdots$ *Donc P.* *-D'où, P si et seulement si Q.* .... *P si et seulement si* $\vdots$ *si et seulement si Q.*
« *P et Q* »	On montre que P est vraie et que Q est vraie.	*-Montrons P.* $\vdots$ *Donc P.* *-Montrons Q.* $\vdots$ *Donc Q.* *-D'où, P et Q.*
« *P ou Q* »	On peut montrer que « (*non* P) $\Rightarrow Q$ » est vraie.	*Supposons non(P). Montrons Q.* $\vdots$ *Donc Q.* *D'où, P ou Q.*

Rappelons que pour prouver qu'une proposition P est fausse, on peut montrer que sa négation $non(P)$ est vraie. Par exemple, pour montrer que la proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est fausse, on peut montrer que sa négation « $\exists\, x \in E,\ non(P(x))$ » est vraie. Donner un élément x_0 de E tel que $non(P(x_0))$ est vraie s'appelle un **contre-exemple** \反例\.

- La flèche « $\Rightarrow$ » ne signifie pas « donc ». En effet, dire « P est vraie donc Q est vraie » n'est pas la proposition « $P \Rightarrow Q$ » (on ne sait pas si P et Q sont vraies ou fausses). On utilise finalement les faits suivants : *P est vraie. Or $P \Rightarrow Q$ est vraie. Donc Q est vraie.*
- Lorsque l'on utilise la flèche « $\Leftrightarrow$ », il faut être sûr que le sens direct ($\Rightarrow$) et le sens réciproque ($\Leftarrow$) soient vrais.

Remarque 61 — *Dans un exercice, pour appliquer un théorème de la forme $A \Rightarrow B$ (« Si A alors B »), on commence donc par vérifier que A (les hypothèses) est vraie. On écrit par exemple*

« On a A. Or d'après le théorème ..., A implique B. Donc B »

Donnons des exemples de rédaction de démonstrations.

Exemples 62

- ***Démontrons*** \证明\ *que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n est pair alors n^2 est pair.*
  Il s'agit de la proposition « $\forall n \in \mathbb{Z},\ (n$ est pair $\Rightarrow n^2$ est pair) ».

  Preuve *: Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrons que si n est pair alors n^2 est pair.*
  Supposons n pair. Nous allons montrer que n^2 est pair.
  Par hypothèse, n est pair, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. On a donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ et $2k^2 \in \mathbb{Z}$.
  Donc n est pair.
  Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n est pair alors n^2 est pair.

- *Démontrons que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.*
  Il s'agit de la proposition « $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \big((a+b)^2 = a^2+b^2 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)\big)$. »

  Preuve *: Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrons, par double implication, que $(a+b)^2 = a^2+b^2$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.*

  ▷ *Supposons que $(a+b)^2 = a^2+b^2$. Montrons que $a = 0$ ou $b = 0$.*
  Supposons $a \neq 0$. Nous allons montrer que $b = 0$.
  On sait que $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ et, par hypothèse, $(a+b)^2 = a^2+b^2$. Donc

  $$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2.$$

  Donc, $2ab = 0$, soit $ab = 0$. Or $a \neq 0$. Donc $b = 0$.
  Donc $a = 0$ ou $b = 0$.
  Donc si $(a+b)^2 = a^2+b^2$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.

  ◁ *Réciproquement, supposons $a = 0$ ou $b = 0$. Montrons que $(a+b)^2 = a^2+b^2$.*
  -1^{er} cas : $a = 0$. Alors

  $$(a+b)^2 = (0+b)^2 = b^2 = 0^2 + b^2 = a^2 + b^2.$$

  -2^{nd} cas : $b = 0$. Alors

  $$(a+b)^2 = (a+0)^2 = a^2 = a^2 + 0^2 = a^2 + b^2.$$

  $-$Donc, dans tous les cas, $(a+b)^2 = a^2+b^2$.
  Donc si $a = 0$ ou $b = 0$ alors $(a+b)^2 = a^2+b^2$.

  Donc, $(a+b)^2 = a^2+b^2$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.
  a et b étant quelconques, on a le résultat.

- *Démontrons que la proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2$ » est fausse.*

  Preuve : *Donnons un contre-exemple.*
  Pour $n = 3$, on a $8 = 2^3 < 3^2 = 9$. Il existe donc un entier naturel n tel que $2^n \leq n^2$. Donc la proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2$ » est fausse.

Le cours de mathématiques est constitué d'une succession de propositions. Chaque proposition est suivie d'une démonstration (ou preuve). Il peut arriver qu'une démonstration soit trop difficile ou qu'elle soit démontrée plus tard dans le cours, on dit alors que la proposition est admise et on ne fait pas de démonstration.

L'exemple qui suit peut être vu comme un extrait d'un cours de trigonométrie. Nous donnons une proposition (à connaître), suivie d'une démonstration, d'un exemple et de quelques remarques.

Exemple 63 —

Proposition 64
Soient a et b deux nombres réels non tous deux nuls. Il existe un nombre réel φ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi).$$

Preuve — *Par hypothèse, $(a,b) \neq (0,0)$, donc $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$. Posons $x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $y_0 = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Alors $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Il existe donc $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 = \cos(\varphi)$ et $y_0 = \sin(\varphi)$.*
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\begin{aligned}
a\cos(x) + b\sin(x) &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) - \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x)\right)\\
&= \sqrt{a^2+b^2}(x_0\cos(x) - y_0\sin(x))\\
&= \sqrt{a^2+b^2}(\cos(\varphi)\cos(x) - \sin(\varphi)\sin(x))\\
&= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi).
\end{aligned}$$

D'où le résultat \因此/由此我们能得到结论\. □

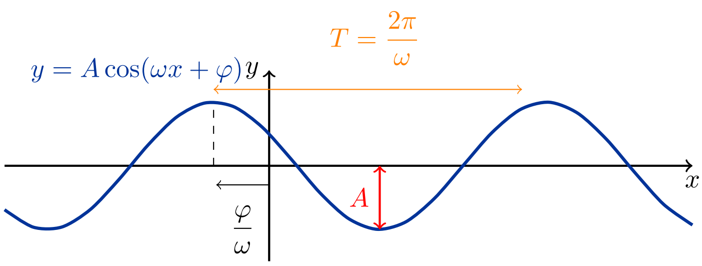
Exemple 65 — *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}
\cos(x) + \sin(x) &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right)\\
&= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Remarque 66 — *On pourrait démontrer de même que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, il existe un nombre réel ψ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

En physique, un **signal sinusoïdal** \正弦信号\ est une fonction de la forme $t \longmapsto A\cos(\omega t + \varphi)$, où A, ω et φ sont des nombres réels. A est appelé **amplitude** \振幅\, ω (se lit « omega ») est appelé **pulsation** \脉冲\ et φ (se lit « phi ») est appelé **phase** \相位\.



La proposition précédente nous dit donc que la somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation ω est à nouveau un signal sinusoïdal de pulsation ω. On peut en effet réécrire la proposition 64 sous la forme :
Pour tout $(A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\omega \in \mathbb{R}$, il existe $A \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

1.5.3 Raisonnements classiques

1.5.3.a. Raisonnement par contraposée (ou par contraposition)

Pour montrer que la proposition « $P \Rightarrow Q$ » est vraie, on peut montrer que sa contraposée, qui est la proposition « $non(Q) \Rightarrow non(P)$ », est vraie. On parle de **raisonnement par contraposée** \换质换位\.

Exemple 67 — *Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n^2 est pair alors n est pair.*

Cette proposition s'écrit « $\forall n \in \mathbb{Z}$, (n^2 pair $\Rightarrow$ n pair) ».

Preuve : *Soit $n \in \mathbb{Z}$.*
Plutôt que de montrer « n^2 pair $\Rightarrow$ n pair », on montre la contraposée « n impair $\Rightarrow$ n^2 impair », plus facile à démontrer.
Montrons par contraposée que si n^2 est pair alors n est pair.
Supposons que n est impair. Nous allons montrer que n^2 est impair.
Par hypothèse, n est impair, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. On a donc

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

et $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$.
Donc n^2 est impair.
Donc si n est impair alors n^2 est impair. On en déduit par contraposée que si n^2 est pair alors n est pair.
D'où le résultat.

1.5.3.b. Raisonnement par l'absurde

On souhaite démontrer qu'une proposition P est vraie. Le **raisonnement par l'absurde** \使用反证法\ consiste à supposer que P est fausse, c'est-à-dire à supposer que $non(P)$ est vraie et montrer que cela conduit à une contradiction. On en déduit alors que P est vraie.

Exemple 68 — *Démontrons que $\sqrt{2}$ est un* ***nombre irrationnel***[1] \无理数\.

Preuve : *Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Alors il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$,* ***premiers entre eux***[2]\互素/互质\, *tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.*
On a donc $2q^2 = p^2$. On en déduit que p^2 est pair. Or, nous avons vu à l'exemple 67 que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n^2 est pair alors n est pair. Donc p est pair. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$. On a donc $p^2 = 4k^2$, puis $2q^2 = 4k^2$. Donc finalement, $q^2 = 2k^2$. On en déduit que q^2 est pair. Donc, comme précédemment, q est pair.
On en déduit que 2 ***divise*** \整除\ *p et 2 divise q. Ceci est* ***absurde*** \矛盾\ *car cela contredit le fait que p et q sont premiers entre eux !*
Donc $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

1. L'ensemble des nombres irrationnels est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: ce sont les nombres réels qui ne sont pas des nombres rationnels
2. Si un entier naturel d divise p et divise q alors $d = 1$

1.5.3.c. Raisonnement par disjonction de cas

Le **raisonnement par disjonction de cas** \分类讨论\ permet de simplifier un raisonnement en distinguant toutes les situations possibles. Cela est notamment utilisé lorsque la proposition dépend d'une variable x.

EXEMPLE 69 — *Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.*

Preuve : *Soit $n \in \mathbb{N}$. Distinguons les cas selon que n est pair ou n est impair.*
• 1^{er} *cas : n est pair. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. On a donc*

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$$

et $k(2k+1)$ est un entier naturel.
• 2^{nd} *cas : n est impair. Alors il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k'+1$. On a donc*

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k'+1)(2k'+2)}{2} = (2k'+1)(k'+1)$$

et $(2k'+1)(k'+1)$ est un entier naturel.
• *Donc, dans tous les cas, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.*
D'où le résultat.

1.5.3.d. Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Démontrer **par récurrence** \数学归纳法\ que la proposition « $\forall n \geq n_0,\ P(n)$ » est vraie repose sur le principe suivant :

Si $P(n_0)$ est vraie (**initialisation** \第一步/起始步骤\) ET pour tout $n \geq n_0$, « $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ » est vraie (**hérédité** \第二步/推递步骤\), alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

REMARQUE 70 — *En général, n_0 vaut 0, 1 ou 2.*

On peut donc, par exemple, rédiger un raisonnement par récurrence comme suit :

> « *Démontrons le résultat par récurrence. Notons, pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ la propriété "...... "* »
>
> • Initialisation : *Vérifions $P(n_0)$ (ce n_0 est à déterminer en fonction de l'énoncé et la vérification est souvent facile.)*
>
> $\vdots$
>
> D'où $P(n_0)$.
>
> • Hérédité : *Soit $n \geq n_0$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$. Dans cette étape, on va utiliser la propriété $P(n)$, qui est l'**hypothèse de récurrence** \归纳假设\.*
>
> $\vdots$
>
> *D'où $P(n+1)$.*
>
> *Par récurrence, on en déduit donc que, pour tout $n \geq n_0$, on a $P(n)$.*

EXEMPLE 71 — *Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.*

Preuve : *Démontrons le résultat par récurrence. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ la propriété :*

$$\text{« } 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ».}$$

- *Initialisation : Pour* $n = 1$, *on a* $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. *D'où* $P(1)$.
- *Hérédité : Soit* $n \geq 1$. *Supposons* $P(n)$, *montrons* $P(n+1)$ *:*

$$\text{« } 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ ».}$$

On a

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = (1 + 2 + \ldots + n) + (n+1).$$

Donc d'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$.

Par récurrence, on a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Le principe que l'on vient de détailler est appelé une **récurrence simple** \第一数学归纳法\ : on déduit $P(n+1)$ directement de $P(n)$. Parfois, on ne peut déduire $P(n+2)$ que de $P(n+1)$ et $P(n)$. On parle alors de **récurrence double** \两步数学归纳法\. Le principe est le suivant :

Si $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies (*initialisation*) ET pour tout $n \geq n_0$, la proposition « $(P(n)$ et $P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$ » est vraie (*hérédité*), alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple 72 — *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la* ***suite*** \数列\ *définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_1 = 3, \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

Preuve : *Démontrons par récurrence le résultat. Notons, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ *la propriété :*

$$\text{« } u_n = 1 + 2^n \text{ ».}$$

- *Initialisation : On a* $u_0 = 2 = 1 + 2^0$ *et* $u_1 = 3 = 1 + 2^1$ *donc* $P(0)$ *et* $P(1)$ *sont vraies.*
- *Hérédité : Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Supposons* $P(n)$ *et* $P(n+1)$, *montrons* $P(n+2)$ *:*

$$\text{« } u_{n+2} = 1 + 2^{n+2} \text{ ».}$$

On a $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, *donc par hypothèses de récurrence,*

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3 \times (1 + 2^{n+1}) - 2 \times (1 + 2^n) \\ &= 3 + 3 \times 2^{n+1} - 2 - 2^{n+1} \\ &= 1 + (3-1) \times 2^{n+1} \\ &= 1 + 2 \times 2^{n+1} \\ &= 1 + 2^{n+2}. \end{aligned}$$

D'où $P(n+2)$.

Par récurrence, on a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

Enfin, il arrive que $P(n+1)$ ne puisse se déduire que de $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, …, $P(n)$. On parle alors de **récurrence forte** \第二数学归纳法/强数学归纳法\. Le principe est le suivant :

Si $P(n_0)$ est vraie (*initialisation*) ET pour tout $n \geq n_0$, la proposition « $(P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ et … et $P(n)) \Rightarrow P(n+1)$ » est vraie (*hérédite*), alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

EXEMPLE 73 — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n u_0$.*

Preuve : *Démontrons le résultat par récurrence. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ la propriété :*

$$\text{« } u_n \leq 2^n u_0 \text{ ».}$$

- *Initialisation : On a $u_0 \leq 2^0 u_0$, donc $P(0)$ est vraie.*
- *Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, supposons $P(k)$. Montrons $P(n+1)$:*

$$\text{« } u_{n+1} \leq 2^{n+1} u_0 \text{ ».}$$

On a $u_{n+1} \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Donc par hypothèses de récurrence,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq \sum_{k=0}^{n} 2^k u_0 = u_0 \sum_{k=0}^{n} 2^k = u_0 \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \\ &\leq 2^{n+1} u_0 \quad \text{car } u_0 \leq 0. \end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$.

Par récurrence forte, on en déduit donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n u_0$.

Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. Cette somme s'appelle une **somme géométrique** \等比级数\.

1.5.3.e. Raisonnement par analyse-synthèse

Lorsque l'on veut chercher les solutions d'un problème et montrer que celles que l'on a trouvées sont les seules, on utilise le raisonnement par **analyse-synthèse** \分析综合法\.

Ce raisonnement s'effectue en deux étapes :

1. *Analyse* : On suppose que l'on a une solution du problème et on cherche à déterminer le maximum de propriétés vérifiées par cette solution.
2. *Synthèse :* On détermine parmi les éléments vérifiant les propriétés obtenues dans l'analyse quels sont ceux effectivement solutions du problème (il n'y en a pas d'autres).

On obtient ainsi l'ensemble des solutions du problème.

Ce raisonnement est particulièrement utile pour démontrer l'**existence** \ 存在性\ et l'**unicité** \唯一性\ d'une solution à un problème.

EXEMPLE 74 — *Déterminons l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Preuve : *Raisonnons par analyse-synthèse.*
• *Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y - f(x)) = 2 - x - y$.*
Soit $x \in \mathbb{R}$. Prenons $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Alors $f(0) = 2 - x - f(x)$. Donc $f(x) = 2 - f(0) - x$.
Donc f est de la forme $f(x) = a - x$ où $a \in \mathbb{R}$.

• *Synthèse : Déterminons parmi les fonctions de la forme* $x \longmapsto a - x$ *celles qui vérifient la condition de l'énoncé. Soit* $a \in \mathbb{R}$. *Soit* $f : x \longmapsto a - x$.
On a

$$\begin{aligned} f(y - f(x)) &= f(y - (a - x)) \\ &= f(y + x - a) \\ &= a - (y + x - a) \\ &= 2a - x - y. \end{aligned}$$

Donc f *vérifie la condition de l'énoncé si et seulement si* $2a = 2$, *soit encore si et seulement si* $a = 1$.
• *Conclusion : Il existe donc une unique fonction vérifiant la condition de l'énoncé, c'est la fonction* $x \longmapsto 1 - x$.

Chapitre 2 Vecteurs du plan et de l'espace

Dans ce deuxième chapitre, nous commençons par introduire le vocabulaire utilisé en **géométrie** \几何\, puis nous nous intéressons aux vecteurs, utilisés notamment en physique.

2.1 Vocabulaire en géométrie

2.1.1 Géométrie dans le plan

On introduit tout d'abord le vocabulaire utilisé lorsque l'on fait de la géométrie dans le **plan** \平面\, aussi appelée **géométrie plane** \平面几何\.

Vocabulaire	Définition/Illustration	Vocabulaire	Définition/Illustration
Point \点\		Figure (géométrique) \图形\	Un ensemble de points
Droite \直线\		Demi-droite \射线\	
Segment \线段\		Milieu d'un segment \线段的中点\	
Droites sécantes \相交的直线\		Droites parallèles \平行线\	

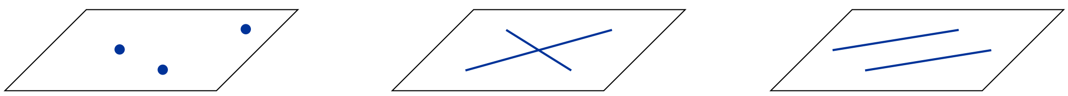
Angle droit \直角\		Droites perpendiculaires \垂直的直线\	
Droites confondues \重合的直线\		Points alignés \共线的点\	
Point d'intersection \交点\		Médiatrice d'un segment \线段的垂直平分线\	La droite passant par le milieu du segment et qui lui est perpendiculaire.
Projection orthogonale (ou projeté orthogonal) d'un point M sur une droite $\mathcal{D}$ \某个点到某条直线的垂直（正交）投影\	Le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par M.	Polygone \多边形\	Figure plane formée par une ligne brisée et fermée
Côté d'un polygone \多边形的边\	Segment qui constitue le polygone	Sommet \多边形的顶点\	Intersection de deux côtés

Diagonale \对角线\	Segment qui relie deux sommets non consécutifs	Triangle \三角形\	Polygone à trois côtés
Triangle isocèle \等腰三角形\		Triangle équilatéral \等边三角形\	
Triangle rectangle \直角三角形\		Quadrilatère \四边形\	Polygone à quatre côtés
Parallélogramme \平行四边形\		Rectangle \矩形\	
Losange \菱形\		Carré \正方形\	

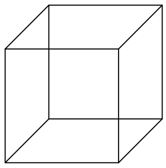
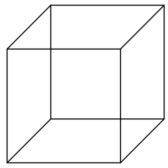
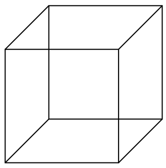
Les définitions et propriétés des quadrilatères particuliers (parallélogramme, rectangle, losange et carré) sont à connaître et seront rappelées en TD.

2.1.2 Géométrie dans l'espace

Un plan est défini par trois points non alignés ou deux droites sécantes ou deux droites strictement parallèles (parallèles et non confondues).



Un plan est une partie de l'**espace** \空间\. Le vocabulaire introduit dans la partie précédente est donc encore utilisé lorsque l'on fait de la géométrie dans l'espace.

Vocabulaire	Définition/Illustration	Vocabulaire	Définition/Illustration
Droites coplanaires \共面的直线\	Droites appartenant à un même plan. 	Droites de même direction	Droites parallèles. 
Droites orthogonales \正交直线\	Droites qui sont parallèles à des droites se coupant à angle droit. 	Droites perpendiculaires \垂直直线\	Droites sécantes et orthogonales.