北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Sciences en français
Mathématiques

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

9 mars 2021

Table des matières

Chapitre 1 Introduction aux mathématiques : vocabulaire, logique et raisonnements

1.1 Exemples d'objets mathématiques

1.1.1 Ensembles et éléments

Définition 1
*Un **ensemble** \集合\ E est une collection d'objets, appelés **éléments** \元素\ de E.*

Définition 2
*On dit que x **appartient** \$x$属于$E$\ à E si x est un élément de l'ensemble E. On note $x \in E$.*

Définition 3
*Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** \$E$包含于$F$\ dans F si tout élément de E est aussi élément de F. On note $E \subset F$. On dit que E est un **sous-ensemble** (ou une **partie**) de F.*

On travaillera avec les ensembles de nombres suivants :

Ensemble	*Notation*	*Exemples d'éléments*
Nombres entiers naturels \自然数\	$\mathbb{N}$	$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.
Nombres entiers relatifs \整数\	$\mathbb{Z}$	$\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
Nombres rationnels \有理数\	$\mathbb{Q}$	$\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*$
Nombres réels \实数\	$\mathbb{R}$	$1,\ -3,\ \frac{1}{2},\ \sqrt{2},\ \pi,\ \ldots$
Nombres complexes \复数\	$\mathbb{C}$	$a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

Ces ensembles privés de 0 sont notés $\mathbb{N}^*$ (se lit « $\mathbb{N}$ étoile ») , $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$.

Exemples 4 *Donnons des exemples d'**inclusions**.*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Nous rencontrerons également les ensembles de nombres suivants.

- L'ensemble des **nombres réels positifs** (≥ 0 (se lit « supérieur ou égal à 0 »)) est noté $\mathbb{R}_+$ (se lit « $\mathbb{R}$ plus ») .
- L'ensemble des **nombres réels strictement positifs** (> 0 (se lit « strictement supérieur à 0 »)) est noté $\mathbb{R}_+^*$ (se lit « $\mathbb{R}$ plus étoile ») .
- L'ensemble des **nombres réels négatifs** (≤ 0 (se lit « inférieur ou égal à 0 »)) est noté $\mathbb{R}_-$ (se lit « $\mathbb{R}$ moins ») .
- L'ensemble des **nombres réels strictement négatifs** (< 0 (se lit « strictement inférieur à 0 »)) est noté $\mathbb{R}_-^*$ (se lit « $\mathbb{R}$ moins étoile ») .

1.1.2 Fonctions

DÉFINITION 5
Soient E et F deux ensembles. Une ***fonction*** *(ou application) \函数\ de E vers F est un objet qui à tout élément x de E associe un et un seul élément y de F, noté $f(x)$ (se lit « f de x ») .*

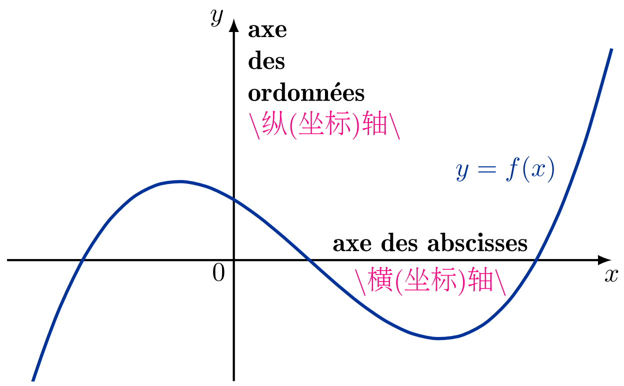
On note $f : E \longrightarrow F$ pour signifier que f est une application de E dans F.
- E est appelé **l'ensemble de définition** \定义域\ de f,
- F est appelé **l'ensemble d'arrivée** \值域\ de f,
- $f(x)$ est appelé **l'image** \象\ de x par f,

On peut préciser les images avec la notation

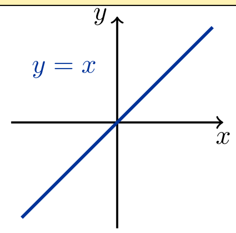
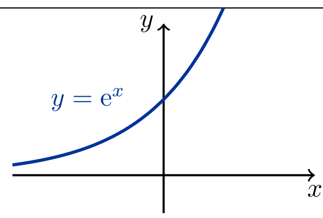
$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array},$$

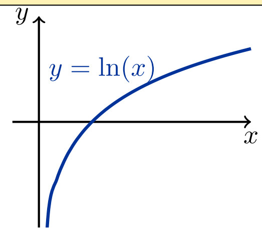
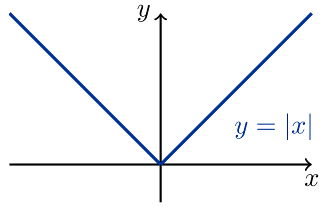
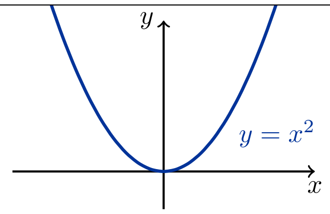
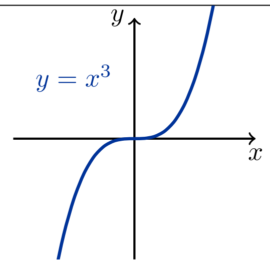
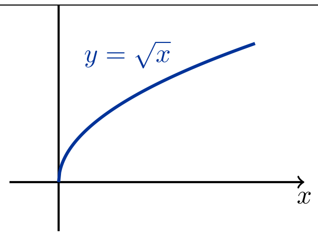
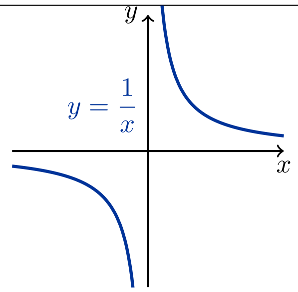
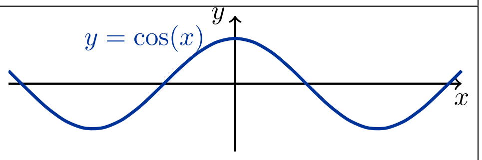
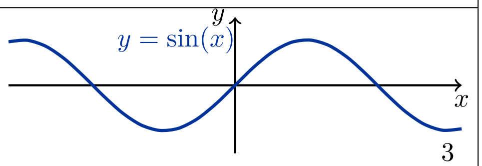
(« la fonction f de E dans F qui à x associe f de x » ou « la fonction f de E dans F, à x on associe f de x »).

DÉFINITION 6
La ***représentation graphique*** *\图象\ d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou courbe représentative) est l'ensemble des* ***points*** *\点\ de* ***coordonnées*** *\坐标\ $(x, f(x))$, où $x \in I$.*



Donnons des exemples de fonctions usuelles.

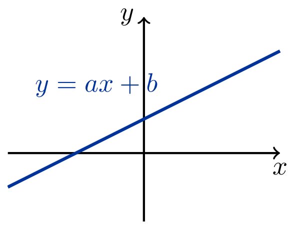
Nom de la fonction	*Notation*	*Représentation graphique*
Identité \恒同\	$\mathrm{id}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$	
Exponentielle \指数函数\	$\exp: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$ $\exp(x)$: « exponentielle x »	

Nom de la fonction	*Notation*	*Représentation graphique*
Logarithme (népérien) \对数函数\	$\begin{array}{rccc} \ln : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$ $\ln(x)$: « ln de x »	
Valeur absolue	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lvert x\rvert \end{array}$ $\lvert x\rvert$: « valeur absolue de x »	
Carré \平方\	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ x^2 : « x au carré »	
Cube \立方\	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ x^3 : « x au cube » ou « x puissance 3 »	
Racine carrée \平方根\	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ $\sqrt{x}$: « racine carrée de x »	
Inverse \反比例函数/倒数\	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ $\dfrac{1}{x}$: « 1 sur x »	
Cosinus \余弦\	$\begin{array}{rccc} \cos : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$ $\cos(x)$: « cosinus x »	
Sinus \正弦\	$\begin{array}{rccc} \sin : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$ $\sin(x)$: « sinus x »	

Les fonctions **affines** sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array},$$

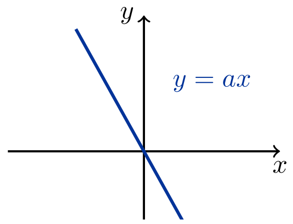
où a, $b \in \mathbb{R}$.



Dans le cas où $b = 0$, on parle de fonctions **linéaires**.
Ce sont donc les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array},$$

où $a \in \mathbb{R}$.



1.2 Quelques éléments de logique

1.2.1 Variables et propositions mathématiques

Définition 7
*Une **proposition** \命题\ (ou assertion) est une phrase mathématique qui est soit **vraie** \真\ (noté V), soit **fausse** \错误\ (noté F).*

Exemples 8

- « $1 + 1 = 2$ » *(se lit « 1 plus 1 égal 2 »)* *est une proposition, qui est vraie.*
- « $5 \times 2 = 4$ » *(se lit « 5 fois 2 égal 4 »)* *est une proposition, qui est fausse.*

En mathématiques, on utilise des **variables** \变量\. Il s'agit presque toujours de lettres (x, y, a, b, n, $\ldots$) parfois indicées (x_1, x_2, $\ldots$). C'est un nom d'objet, qui ne désigne pas un objet particulier mais des objets appartenant à un certain ensemble.

Souvent, une proposition dépend d'une ou plusieurs variables. Sa **valeur de vérité** (vraie ou fausse) peut alors être donnée lorsque l'on précise les **valeurs** \值\ des variables. En général, on note $P(x)$ une proposition qui dépend de la variable est x.

Exemples 9

- *La phrase $P(x)$ « $x + 1 = 2$ » est une proposition à une variable. Par exemple, $P(1)$ est vraie et $P(2)$ est fausse.*
- *La phrase $P(n, k)$ « $n + k = 3$ » est une proposition à deux variables. Par exemple, $P(2, 1)$ est vraie et $P(2, 0)$ est fausse.*
- *La phrase $P(x, A)$ « $x \in A$ » est une proposition à deux variables. Par exemple, $P(1, \mathbb{N})$ est vraie et $P(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$ est fausse.*

Définition 10
*Soient P et Q deux propositions. Si P est vraie lorsque Q est vraie et si P est fausse lorsque Q est fausse, on dit que P et Q sont **logiquement équivalentes** ou qu'elles ont la même table de vérité. On note $P \equiv Q$.*

Exemple 11 — *Soient $P(x)$ la proposition « $x > 0$ » (se lit « x strictement supérieur à 0 ») et $Q(x)$ la proposition « $-x < 0$ » (se lit « moins x strictement inférieur à 0 ») . Alors $P(x) \equiv Q(x)$.*

Définition 12
Soit E un ensemble. Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable x. On note $\{x \in E \mid P(x)\}$ (se lit « l'ensemble des x appartenant à E tels que $P(x)$ ») l'ensemble des éléments de E tels que $P(x)$ est vraie.

Exemples 13

- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$: *c'est l'ensemble des nombres réels positifs.*
- $\mathbb{R}^*_- = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$: *c'est l'ensemble des nombres réels strictement négatifs.*
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$: *c'est l'**intervalle** \区间\ $[a, b[$ (fermé en a, ouvert en b).*
  ($a \leq x < b$ se lit, par exemple, « x supérieur ou égal à a et strictement inférieur à b »)
- $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est pair}\} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$: *c'est l'ensemble des **nombres pairs** \偶数\.*
- $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est impair}\} = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$: *c'est l'ensemble des **nombres impairs** \奇数\.*

Remarque 14 — *À chaque fois que l'on écrit une phrase mathématique, il est sous-entendu qu'elle est vraie.*

1.2.2 Connecteurs logiques

À partir d'une ou plusieurs propositions, on peut construire d'autres propositions.

1.2.2.a. Négation

Soit P une proposition. La **négation** de P est la proposition $non(P)$ (aussi notée $\neg P$), qui est

- vraie lorsque P est fausse,
- fausse lorsque P est vraie.

On représente les valeurs de vérité de $non(P)$ en fonction de celles de P dans une table de vérité :

P	$non(P)$
V	F
F	V

Généralement, on remplace la proposition $non(P)$ par une proposition logiquement équivalente.

P	$non(P)$
$x > 4$ (se lit « x est strictement supérieur à 4 »)	$x \leq 4$ (se lit « x est inférieur ou égal à 4 »)
$a = 3$ (se lit « a égal 3 »)	$a \neq 3$ (se lit « a différent de 3 »)
$x \in \mathbb{N}$ (se lit « x appartient à $\mathbb{N}$ » ou « x est un entier naturel »)	$x \notin \mathbb{N}$ (se lit « x n'appartient pas à $\mathbb{N}$ » ou « x n'est pas un entier naturel »)
n est pair	n est impair
L'ensemble E a au moins deux éléments	L'ensemble E a au plus un élément
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction **croissante** \增函数\	$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas croissante
Les **droites** \直线\ $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **parallèles** \平行\	Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **sécantes** \相交/相割\.

1.2.2.b. « Ou »

Soient P et Q des propositions. La proposition « P *ou* Q » (aussi notée $P \vee Q$) est la proposition qui est

- fausse lorsque P et Q sont fausses simultanément,
- vraie dans les autres cas.

On résume cela dans une table de vérité :

P	Q	P *ou* Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemples 15

P	Q	P *ou* Q
$x \in [0,4]$	$x \in [2,8]$	$x \in [0,8]$
$x > 0$	$x = 0$	$x \geq 0$
$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$ *(se lit « x appartient à A union B »)*

1.2.2.c. « Et »

Soient P et Q des propositions. La proposition « P *et* Q » (aussi notée $P \wedge Q$) est la proposition qui est

- vraie lorsque les deux propositions sont vraies simultanément,
- fausse dans les autres cas.

On résume cela dans une table de vérité :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemples 16

P	Q	P *et* Q
$x \in [0,4]$	$x \in [2,8]$	$x \in [2,4]$
$x < 10$	$x \geq 2$	$x \in [2,10[$
$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$ *(se lit « x appartient à A inter B »)*
ABCD est un ***losange*** \菱形\	*ABCD est un* ***rectangle*** \矩形\	*ABCD est un* ***carré*** \正方形\

1.2.2.d. Quelques règles de calcul

Proposition 17
Soient P, Q et R des propositions. On a :

- $non(non\,P) \equiv P$,
- $non(P \text{ et } Q) \equiv (non\,P) \text{ ou } (non\,Q)$,
- $non(P \text{ ou } Q) \equiv (non\,P) \text{ et } (non\,Q)$,

- *P et (Q ou R) $\equiv$ (P et Q) ou (P et R),*
- *P ou (Q et R) $\equiv$ (P ou Q) et (P ou R),*
- *La proposition « P et (non P) » est toujours fausse,*
- *La proposition « P ou (non P) » est toujours vraie : soit P est vraie, soit non(P) est vraie.*

Preuve — On peut démontrer ces propriétés avec des tables de vérité. Donnons un exemple.

P	Q	P et Q	non(P et Q)	non(P)	non(Q)	non(P) ou non(Q)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Donc non(P et Q) $\equiv$ non(P) ou non(Q). □

EXEMPLE 18 — *La négation de « $x \geq 1$ et $x < 4$ » est « $x < 1$ ou $x \geq 4$ ».*

REMARQUE 19 — *Une proposition qui ne peut être que fausse s'appelle une **contradiction** \矛盾\.*

1.2.2.e. Implication

Soient P et Q des propositions. La proposition « $P \Rightarrow Q$ » (se lit « P implique Q » ou « si P, alors Q ») est la proposition qui est

- fausse lorsque P est vraie et Q est fausse,
- vraie dans les autres cas.

On résume cela dans la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

REMARQUE 20 — *Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que*

- *P est une **condition suffisante** pour Q,*
- *Q est une **condition nécessaire** pour P.*

EXEMPLES 21

- *La proposition « 2 est pair $\Rightarrow$ 3 est impair » est vraie.*
- *La proposition « 2 est impair $\Rightarrow$ 3 est pair » est vraie (même si c'est surprenant).*
- *La proposition « 2 est pair $\Rightarrow$ 3 est pair » est fausse.*
- *La proposition « 2 est impair $\Rightarrow$ 3 est impair » est vraie.*
- *La proposition « Si $x > 2$ alors $x^3 > 8$ » est vraie.*

Ainsi, lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on ne peut rien dire sur la valeur de vérité de P.

PROPOSITION 22
On a $P \Rightarrow Q \equiv$ non(P) ou Q.

Preuve — Montrons que ces deux propositions ont la même table de vérité.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	non(P)	non(P) ou Q
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

□

On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 23
La négation de la proposition « $P \Rightarrow Q$ » est « P et non(Q) ».

Preuve — $non(P \Rightarrow Q) \;\equiv\; non(non(P) \text{ ou } Q) \;\equiv P \text{ et } non(Q)$. □

EXEMPLE 24 — *Soit $x \in \mathbb{R}$. La négation de « $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ » est $x^2 = 1$ et $x \neq 1$.*

DÉFINITION 25

- *La proposition « $Q \Rightarrow P$ » s'appelle la* ***réciproque*** *de l'implication « $P \Rightarrow Q$ ».*
- *La proposition « non$(Q) \Rightarrow$ non(P) » s'appelle la* ***contraposée*** *de l'implication « $P \Rightarrow Q$ ».*

EXEMPLE 26 — *Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons la proposition « $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ »*

- *Sa contraposée est « $x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$ ».*
- *Sa réciproque est « $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ ».*

PROPOSITION 27
On a $P \Rightarrow Q \;\equiv\; (non\, Q) \Rightarrow (non P)$.

Preuve — $P \Rightarrow Q \;\equiv\; non(P) \text{ ou } Q \;\equiv\; Q \text{ ou } non(P) \;\equiv\; non(non(Q)) \text{ ou } non(P) \;\equiv\; non(Q) \Rightarrow non(P)$. □

PROPOSITION 28
Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ alors $P \Rightarrow R$.

1.2.2.f. Équivalence

Soient P et Q des propositions. La proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » (se lit « P équivalent à Q » ou « P si et seulement si Q ») est la proposition qui est

- vraie lorsque les propositions P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses,
- fausse dans les autres cas.

On résume cela dans la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

EXEMPLES 29

- *La proposition « $(1 = 1) \Leftrightarrow (0 = 0)$ » est vraie.*
- *La proposition « $(1 = 0) \Leftrightarrow (2 = 0)$ » est vraie.*
- *La proposition « $(1 = 0) \Leftrightarrow (0 = 0)$ » est fausse.*
- *Soit x un nombre réel. La proposition « $x > 2$ si et seulement si $x^3 > 8$ » est vraie.*

PROPOSITION 30
On a $P \Leftrightarrow Q \;\equiv\; (P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$.

Si la proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » est vraie, on dit que Q est une **condition nécessaire et suffisante** pour P et on dit que P et Q sont **équivalentes**.

REMARQUE 31 — *Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on peut dire que P et Q ont les mêmes valeurs de vérité et donc $P \;\equiv\; Q$.*

1.2.3 Quantificateurs \量词\

1.2.3.a. Quantificateurs universel et existentiel

Soit E un ensemble. Soit $P(x)$ une proposition dépendant de la variable x, avec $x \in E$.

Définition 32
*Le **quantificateur universel** \全称量词\, noté $\forall$ (se lit « pour tout » ou « quel que soit ») permet de définir la proposition « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ » qui est*

- *vraie lorsque pour tous les éléments x appartenant à E, $P(x)$ est vraie,*
- *fausse sinon (c'est-à-dire si $P(x)$ est fausse pour **au moins** \至少\ un élément x de E).*

Exemples 33

- *La proposition « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ » est vraie.*
- *La proposition « $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n-3)n > 0$ » est fausse : pour $n = 1$, $(n-3)n = -2 \leq 0$.*
- *La proposition « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$ » est vraie.*

Définition 34
*Le **quantificateur existentiel** \存在量词\, noté $\exists$ (se lit « il existe ... tel que ») permet de définir la proposition « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » qui est*

- *vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E,*
- *fausse lorsque $P(x)$ est fausse pour tous les éléments x de E.*

Remarque 35 — *« Il existe un » signifie « il existe **au moins** \至少\ un ».*

On rencontre parfois la notation « $\exists!\, x \in E,\ P(x)$ » (se lit « il existe un **unique** \唯一的\ élément x de E tel que $P(x)$ ») qui signifie qu'il existe un et un seul élément x de E vérifiant $P(x)$.

Exemples 36

- *La proposition « $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4$ » est vraie, par exemple, pour $x = 2$ ou $x = -2$.*
- *La proposition « $\exists\, n \in \mathbb{N},\ n^2 = 2$ » est fausse.*
- *La proposition « $\exists!\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) = 0$ » est vraie : l'unique élément de $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\ln(x) = 0$ est $x = 1$.*

Remarque 37 — *Si la proposition « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ » est vraie alors la proposition « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » est vraie. Mais la proposition « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » peut être vraie et la proposition « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ » fausse. Voyons cela dans l'exemple qui suit.*

Exemples 38

- *La proposition « $\forall\, x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ » est fausse : par exemple, pour $x = -1$, $x<0$.*
- *La proposition « $\exists\, x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ » est vraie : par exemple, pour $x = 1$, $x \geq 0$.*

Les quantificateurs sont donc extrêmement importants en mathématiques. L'exemple précédent nous montre que sans précision sur la variable x, la proposition « $x \geq 0$ » n'a pas de sens.

Les symboles « $\forall$ » et « $\exists$ » ne sont pas des **abréviations** \缩写/简写\, ils ne doivent pas être utilisés dans une phrase en français.

Proposition 39
On a

- *non*$(\forall\, x \in E,\ P(x)) \ \equiv\ \exists\, x \in E,\ $*non*$(P(x))$,
- *non*$(\exists\, x \in E,\ P(x)) \ \equiv\ \forall\, x \in E,\ $*non*$(P(x))$.

EXEMPLE 40 — *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La négation de « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ » est « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$ ».*

On peut intervertir les quantificateurs de même nature.

PROPOSITION 41
Soit $P(x,y)$ une proposition dépendant de deux variables. On a
- $\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y) \ \equiv\ \forall y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x,y)$.
- $\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y) \ \equiv\ \exists y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y)$.

On ne peut pas intervertir $\forall$ et $\exists$. Par exemple, les propositions suivantes n'ont pas la même signification.
- La proposition « $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y)$ » signifie que pour tout $x \in E$, il existe une valeur $y \in F$ (qui dépend *a priori* de x) telle que $P(x,y)$ est vraie. On dit que y dépend de x.
- La proposition « $\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x,y)$ » signifie qu'il existe une valeur $y \in F$ telle que $P(x,y)$ est vraie pour toutes les valeurs de x dans E (c'est le même y pour tous les x).

EXEMPLES 42
- *La proposition « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \geq y$ » signifie que tout nombre réel x est supérieur ou égal à un nombre positif y (qui dépend de x). C'est une proposition qui est vraie : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut prendre $y = x - 1$ et on a $x \geq y$.*
- *Mais la proposition « $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq y$ » signifie que tout nombre réel x est supérieur ou égal à un même nombre réel y. C'est une proposition qui est fausse.*

PROPOSITION 43
La négation de « $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y)$ » est « $\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ non(P(x,y))$ ».

EXEMPLE 44 — *La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$ » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 \leq x$ ».*

PROPOSITION 45
On a
- $\forall x \in E,\ (P(x)\ et\ Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ P(x))\ et\ (\forall x \in E,\ Q(x))$,
- $\forall x \in E,\ (P(x)\ ou\ Q(x)) \Leftarrow (\forall x \in E,\ P(x))\ ou\ (\forall x \in E,\ Q(x))$,
- $\exists x \in E,\ (P(x)\ et\ Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in E,\ P(x))\ et\ (\exists x \in E,\ Q(x))$,
- $\exists x \in E,\ (P(x)\ ou\ Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E,\ P(x))\ ou\ (\exists x \in E,\ Q(x))$,

Pour les deuxième et troisième points, il n'y a pas équivalence comme le montrent les exemples suivants.

EXEMPLES 46
- *La proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ (n$ est pair ou n est impair $)$ » est ....*
  Mais la proposition « $(\forall n \in \mathbb{N},\ n$ est pair$)$ ou $(\forall n \in \mathbb{N},\ n$ est impair$)$ » est ....
- *La proposition « $\exists x \in \mathbb{R},\ (\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = 0)$ » est ....*
  Mais la proposition « $(\exists x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = 0)$ » est ....
  Pour expliciter le fait que le x n'est pas le même dans la proposition « $\exists x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 0)$ » que dans la proposition « $\exists x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = 0$ », on pourra utiliser des lettres distinctes. Par exemple, on préférera la notation « $(\exists u \in \mathbb{R},\ \cos(u) = 0)$ et $(\exists v \in \mathbb{R},\ \sin(v) = 0)$ »

1.2.3.b. Variables muettes

On suppose que la variable y n'apparaît pas dans $P(x)$. Alors

- $\forall x \in E,\ P(x) \ \equiv\ \forall y \in E,\ P(y)$.
- $\exists x \in E,\ P(x) \ \equiv\ \exists y \in E,\ P(y)$.

On dit que la variable apparaissant dans la proposition est **muette** \虚拟变量/哑变量\, on peut la remplacer par n'importe quelle lettre.

Donnons d'autres exemples fréquents en mathématiques où la variable est muette.

EXEMPLES 47

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ *(se lit « l'ensemble des x appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x est supérieur ou égal à 1 »),*
- $\lim\limits_{t \to +\infty} \exp(-t) = 0$ *(se lit « la **limite** \极限\ lorsque t tend vers $+\infty$ de exponentielle moins t est égale à 0 »),*
- $\sum\limits_{k=1}^{5} k = 15$ *(se lit « la **somme** \和\ pour k allant de 1 à 5 des k est égale à 15 »),*
- $\prod\limits_{i=1}^{4} i = 24$ *(se lit « le **produit** \积\ pour i allant de 1 à 4 des i est égal à 24 »),*
- $x \longmapsto x^2 + x + 1$ *(se lit « la fonction qui à x associe $x^2 + x + 1$ »),*
- *L'**équation** \方程\ $z^2 + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.*

1.3 Utilisation des quantificateurs : vocabulaire sur les fonctions

On introduit le vocabulaire à connaître sur les fonctions. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que la fonction f est	Définition	Illustration
la fonction nulle \零函数\	$\ldots x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.$	
~~est~~ s'annule \互相抵销\	$\ldots x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$	
positive (ou à valeurs positives) \正函数（取值都大于0）\	$\ldots x \in \mathbb{R},\ f(x) \ldots 0$	

On dit que la fonction f est	Définition	Illustration
constante \常值函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y).$ ou $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C.$	
croissante \增函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \ldots f(y)).$	
strictement croissante \严格单调递增\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x < y \Rightarrow f(x) \ldots f(y)).$	
décroissante \减函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \ldots f(y)).$	
strictement décroissante \严格单调递减\	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x < y \Rightarrow f(x) \ldots f(y)).$	
monotone \单调函数\	f est croissante ou f est décroissante	
T-périodique \周期为T的函数\	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = \ \ldots\ldots\ldots.$	

On dit que la fonction f est	Définition	Illustration
périodique	$\dots T \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$	
majorée \有上界\	$\dots M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \dots M.$	
minorée \有下界\	$\dots m \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ m \dots f(x).$	
bornée \有界\	f est majorée et f est minorée.	
paire \偶函数\	$\dots x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \ \dots\dots\dots.$	
impaire \奇函数\	$\dots x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \ \dots\dots\dots\dots.$	