Feuille de TD n° 1 - Correction

Vocabulaire et logique

5 mars 2021

Vocabulaire

- $\emptyset$: ensemble vide,
- ∞ : infini,
- $+\infty$: plus l'infini,
- $-\infty$: moins l'infini,
- symétrique \对称\
- couper \相交\
- point d'intersection \交点\
- f est à valeurs \值域\ dans A : l'ensemble d'arrivée de f est inclus dans A.
- équation \方程\
- multiple \倍式\

Exercice 1.

1. Lire les propositions suivantes puis donner leur négation.
   (a) $x = 10$, négation : $x \neq 10$,
   (b) $y \in \mathbb{Z}$, négation : $x \notin \mathbb{Z}$,
   (c) p est un nombre impair, négation : p est un nombre pair
   (d) $x < -1$, négation : $x \geq -1$
   (e) $x \in]-1,5]$, négation : $x \notin]-1,5]$,
   (f) $y \notin]2,+\infty[$, négation : $y \in]2,+\infty[$
   (g) $f(x) \geq \pi$, négation : $f(x) < \pi$,
   (h) $\exp(ix) \in \mathbb{C}$, négation : $\exp(ix) \notin \mathbb{C}$
   (i) $\dfrac{1+x}{x^2} \neq 3$, négation : $\dfrac{1+x}{x^2} = 3$
   (j) L'ensemble E a plus de un élément, négation : L'ensemble E a 0 élément, ou L'ensemble E est l'ensemble vide.
   (k) L'ensemble E a au plus un élément, négation : L'ensemble E plus de deux éléments, ou L'ensemble E a au moins deux éléments, ou L'ensemble E a strictement plus de un élément.
2. Compléter les pointillés à l'aide d'ensembles ou d'intervalles puis lire les propositions suivantes.
   (a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x^2 \leq 4\} = [-2,-1[\cup]1,2]$,
   (b) $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{2p+1 \mid p \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$,
   (c) $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\} = \emptyset$,

Exercice 2. Compléter les pointillés.

1. La fonction exp est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction cosinus/sinus est à valeurs dans $[-1,1]$.
3. La représentation graphique de la fonction $x \longmapsto |x|$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
4. Le point M de coordonnées $(0,\sqrt{3})$ appartient à l'axe des ordonnées.
5. La courbe représentative de la fonction ln coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(1,0)$.

6. L'image de $\frac{3\pi}{4}$ par la fonction sin est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
7. L'image de 2 par la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto x^2 + \exp(x)$ vaut $4 + \mathrm{e}^2$.
8. Les points 2 et -2 ont la même image par la fonction carrée, cette image vaut 4.
9. On note x^3 l'image de x par la fonction cube.
10. Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$. L'image de x par la fonction inverse est strictement négative.
11. Soit $x \in]0,1[$. On a $\ln(x) \in]-\infty, 0[$.
12. Les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto \frac{6}{x}$ et $x \longmapsto x+5$ sont $(1,6)$ et $(-6,-1)$
13. La droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x$ est la représentation graphique de la fonction linéaire $x \longmapsto -\frac{1}{2}x$.
14. Les droites d'équation $y = 2x+1$ et $y = -x-2$ sont sécantes au point de coordonnées $(-1,-1)$.

Exercice 3 (Table de vérité)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $P(n)$ la proposition « n est un multiple de 2 » et $Q(n)$ la proposition « n est un multiple de 3 ».

1. Déterminer les valeurs de vérité de « $(P\ et\ Q)(n)$ » (qui signifie « $P(n)\ et\ Q(n)$ ») selon différentes valeurs de n :

n	$P(n)$	$Q(n)$	$(P\,et\,Q)(n)$
8	V	F	F
9	F	V	F
10	V	F	F
11	F	F	F
12	V	V	V

2. Comment peut-on réécrire la proposition $(P\ et\ Q)(n)$? « n est un multiple de 6 ».

Exercice 4 (Propositions logiquement équivalentes)**.**

Soient P, Q et R des propositions.

1. (a) Compléter la table de vérité de « $non(P\ et\ Q)$ » :

P	Q	$P\ et\ Q$	$non(P\ et\ Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

(b) Compléter la table de vérité de « $non(P)\ ou\ non(Q)$ » :

P	Q	$non(P)$	$non(Q)$	$non(P)\ ou\ non(Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

(c) Que peut-on conclure ? Les deux propositions ont la même table de vérité, donc les propositions « $non(P\ et\ Q)$ » et « $non(P)\ ou\ non(Q)$ » sont logiquement équivalentes.

2. De la même manière, démontrer que les propositions « $non(P\ ou\ Q)$ » et « $non(P)\ et\ non(Q)$ » sont logiquement équivalentes.

P	Q	$non(P)$	$non(Q)$	$non(P)\ et\ non(Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

P	Q	P *ou* Q	*non*(P *ou* Q)
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Les deux propositions ont la même table de vérité, donc les propositions « $non(P \text{ } ou \text{ } Q)$ » et « $non(P)$ *et* $non(Q)$ » sont logiquement équivalentes.

3. (a) Compléter la table de vérité de « P *et* (Q *ou* R) » :

P	Q	R	Q *ou* R	P *et* (Q *ou* R)
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

(b) Compléter la table de vérité de « (P *et* Q) *ou* (P *et* R) » :

P	Q	R	P *et* Q	P *et* R	(P *et* Q) *ou* (P *et* R)
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

(c) Que peut-on conclure ? Les deux propositions ont la même table de vérité, donc les propositions « P *et*(Q *ou* R) » et « (P *et* Q) *ou* (P *et* R) » sont logiquement équivalentes.

4. De même, démontrer que les propositions « P *ou* (Q *et* R) » et « (P *ou* Q) *et* (P *ou* R) » sont logiquement équivalentes.
Comme à la question précédente, on obtient la même table de vérité (sans les détails) :

P	Q	R	P *ou* (Q *et* R) / (P *ou* Q) *et* (P *ou* R)
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Ces deux propositions sont donc logiquement équivalentes.