FEUILLE DE TD N° 2

Logique et quantificateurs

10 mars 2021

Vocabulaire : fonction croissante \常值函数\, diviser \除\, solution \解\, produit \积\,

Exercice 1 (Réciproque et contraposée)**.**

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner la réciproque puis la contraposée de la proposition « f croissante $\Rightarrow f(3) \geq f(2)$ ».
2. Soient x et y deux nombres réels. Donner la réciproque puis la contraposée de la proposition « $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ *et* $y \neq 0$ ».

Exercice 2 (Implications, équivalences)**.** Soient x, a et b des nombres réels. Compléter les pointillés avec $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ ou $\Leftarrow$ pour que les propositions suivantes soient vraies :

1. $x < 1 \quad \ldots \quad \ln(x) < 0$,
2. $x = \dfrac{\pi}{3} \quad \ldots \quad \cos(x) = \dfrac{1}{2}$,
3. $|x| \leq 3 \quad \ldots \quad 0 \leq x \leq 3$,
4. $\dfrac{1}{x} > 0 \quad \ldots \quad x > 0$,
5. $a^2 = b^2 \quad \ldots \quad a = b$,
6. $a > 0$ et $b > 0 \quad \ldots \quad ab > 0$.

Exercice 3. Compléter avec $\forall$ ou $\exists$ pour que les énoncés suivants soient vrais.

1. $\ldots\ldots x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$,
2. $\ldots\ldots x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$,
3. $\ldots\ldots x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$,
4. $\ldots\ldots x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \neq 0$.

Exercice 4. Soit $A = \{26, 13, 5, 28\}$. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall k \in A,\ k \leq 30$.
2. $\forall k \in A,\ k$ est pair.
3. $\exists k \in A,\ k$ est un multiple de 4.
4. $\exists k \in A,\ \forall n \in A,\ k \leq n$.
5. $\exists k_1 \in A,\ \exists k_2 \in A,\ k_1$ divise k_2.
6. $\forall k_1 \in A,\ \exists k_2 \in A,\ k_1$ divise k_2.

Exercice 5. Pour chacune des propositions suivantes, expliquer en français leur signification puis indiquer si elle est vraie ou fausse. Que peut-on conclure ?

1. $\forall y \in \mathbb{R}_+,\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = x^2$,
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+,\ y = x^2$.

Exercice 6. Écrire la négation des propositions suivantes.

1. $\exists z \in C,\ z \in B$,
2. $\forall z \in D,\ z \notin E$,
3. $\exists y \in]-\infty, 2],\ h(y) = 0$,
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -n^2 - 1 > 0$,
5. $\forall q \in \mathbb{N},\ 2q - 1$ est impair,
6. $\exists x \in C,\ x \notin A$ *et* $x \in F$,
7. $\exists z \in [1, 10[,\ g(z) > f(z)$.
8. $\forall z \in B,\ (z \notin F \Rightarrow z \in A)$,
9. $\forall x \in A,\ (x > \sqrt{x}$ *ou* $\ln x > 0)$.
10. $\exists x \in \mathbb{R},\ (x + 1 = 0$ *et* $x + 2 = 0)$,
11. $(\exists x \in \mathbb{R},\ x + 1 = 0)$ *et* $(\exists x \in \mathbb{R},\ x + 2 = 0)$,
12. $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, (\sqrt{n} + \sqrt{m} = 0 \Rightarrow n = m = 0)$.
13. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z},\ |x - y| > 1$.
14. $\forall M > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, (x > x_0 \Rightarrow f(x) > M)$.

Exercice 7. Écrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes.

1. L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.
2. L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
3. Pour tout réel strictement positif ε, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N, on a $|1/n| < \varepsilon$.
4. Tous les nombres réels positifs sont le carré d'au moins un nombre réel.
5. Tout nombre rationnel r s'écrit sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où p appartient à $\mathbb{Z}$ et q appartient à $\mathbb{N}^*$.
6. Pour tout nombre réel non nul, il existe un nombre réel tel que le produit des deux nombres vaut 1.