Feuille de TD n° 2 - Correction

Logique et quantificateurs

12 mars 2021

Vocabulaire : fonction croissante \常值函数\, diviser \除\, solution \解\, produit \积\,

Exercice 1 (Réciproque et contraposée)**.**

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner la réciproque puis la contraposée de la proposition « f croissante $\Rightarrow f(3) \geq f(2)$ ».
2. Soient x et y deux nombres réels. Donner la réciproque puis la contraposée de la proposition « $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ *et* $y \neq 0$ ».

---

1. Réciproque : « $f(3) \geq f(2) \Rightarrow f$ croissante ».
   Contraposée : « $f(3) < f(2) \Rightarrow f$ n'est pas croissante ».
2. Réciproque : « $x \neq 0$ *et* $y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0 >$.
   Contraposée : « $x = 0$ ou $y = 0 \Rightarrow xy = 0$ ».

Exercice 2 (Implications, équivalences)**.** Soient x, a et b des nombres réels. Compléter les pointillés avec $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ ou $\Leftarrow$ pour que les propositions suivantes soient vraies :

1. $x < 1 \Leftrightarrow \ln(x) < 0$,
2. $x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \cos(x) = \dfrac{1}{2}$.
   La réciproque est fausse puisque par exemple, $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.
3. $0 \leq x \leq 3 \Rightarrow |x| \leq 3$.
   La réciproque est fausse puisque par exemple $|-2| = 2 \leq 3$ et $-2 \notin [0,3]$.
4. $\dfrac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$,
5. $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$.
   La réciproque est fausse puisque l'on peut avoir $a = -b$.
6. $a > 0$ et $b > 0 \Rightarrow ab > 0$.
   La réciproque est fausse puisque pour $a < 0$ et $b < 0$, on a aussi $ab > 0$.

Exercice 3. Compléter avec $\forall$ ou $\exists$ pour que les énoncés suivants soient vrais.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$. En effet, pour $x = -\dfrac{1}{2}$, l'équation est vérifiée.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$. En effet, cette équation a deux solutions réelles, -1 et -2.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \neq 0$. En effet le discriminant \判别式\ Δ est strictement négatif.

Exercice 4. Soit $A = \{26, 13, 5, 28\}$. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall\, k \in A,\ k \leq 30$.
2. $\forall\, k \in A,\ k$ est pair.
3. $\exists\, k \in A,\ k$ est un multiple de 4.
4. $\exists\, k \in A,\ \forall n \in A,\ k \leq n$.
5. $\exists k_1 \in A,\ \exists k_2 \in A,\ k_1$ divise k_2.
6. $\forall k_1 \in A,\ \exists k_2 \in A,\ k_1$ divise k_2.

---

1. Vrai : tous les éléments de A sont inférieurs ou égaux à 30.
2. Faux : par exemple, 13 est un élément de A qui est impair.
3. Vrai : 28 est un élément de A qui est multiple de 4 : $28 = 4 \times 7$.
4. Vrai : en prenant $k = 5$, tous les éléments de A sont supérieurs ou égaux à 5.
5. Vrai : en prenant par exemple $k_1 = 13$ et $k_2 = 26$, k_1 divise k_2 puisque $26 = 2 \times 13$.
6. Vrai : pour tous les éléments k_1 de A, en prenant $k_2 = k_1 \in A$, k_1 divise k_2 puisque $k_1 = 1 \times k_1$.

Exercice 5. Pour chacune des propositions suivantes, expliquer en français leur signification puis indiquer si elle est vraie ou fausse. Que peut-on conclure ?

1. $\forall y \in \mathbb{R}_+,\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = x^2$,
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+,\ y = x^2$.

---

1. Tout nombre réel positif est le carré d'un nombre réel.
   Cette proposition est vraie : pour tout élément $y \in \mathbb{R}$, on peut prendre $x = \sqrt{y}$ et alors $y = x^2$. Ici, le x dépend du y.
2. Tout nombre réel positif est le carré d'un **même** nombre réel.
   Cette proposition est fausse, sinon tous les nombres réels positifs seraient égaux.

On ne peut donc pas intervertir les quantificateurs $\exists$ et $\forall$.

Exercice 6. Écrire la négation des propositions suivantes.

1. $\exists z \in C,\ z \in B$,
2. $\forall z \in D,\ z \notin E$,
3. $\exists y \in]-\infty, 2],\ h(y) = 0$,
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -n^2 - 1 > 0$,
5. $\forall q \in \mathbb{N},\ 2q - 1$ est impair,
6. $\exists x \in C,\ x \notin A\ et\ x \in F$,
7. $\exists z \in [1, 10[,\ g(z) > f(z)$.
8. $\forall z \in B,\ (z \notin F \Rightarrow z \in A)$,
9. $\forall x \in A,\ (x > \sqrt{x}\ ou\ \ln x > 0)$.
10. $\exists x \in \mathbb{R},\ (x + 1 = 0\ et\ x + 2 = 0)$,
11. $(\exists x \in \mathbb{R},\ x + 1 = 0)\ et\ (\exists x \in \mathbb{R},\ x + 2 = 0)$,
12. $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, (\sqrt{n} + \sqrt{m} = 0 \Rightarrow n = m = 0)$.
13. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z},\ |x - y| > 1$.
14. $\forall M > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, (x > x_0 \Rightarrow f(x) > M)$.

---

1. $\forall z \in C,\ z \notin B$.
2. $\exists z \in D,\ z \in E$.
3. $\forall y \in]-\infty, 2], h(y) \neq 0$.
4. $\exists n \in \mathbb{N}^*, -n^2 - 1 \leq 0$.
5. $\exists q \in \mathbb{N}, 2q - 1$ est pair.
6. $\forall x \in C, x \in A$ ou $x \notin F$. (la négation de « P et Q » est « *non*(P) ou *non*(Q) »).
7. $\forall z \in [1, 10[, g(z) \leq f(z)$.
8. $\exists z \in B, (z \notin F$ et $z \notin A)$. (la négation de « $P \Rightarrow Q$ » est « P et *non*(Q) »)
9. $\exists x \in A, (x \leq \sqrt{x}$ et $\ln(x) \leq 0)$. (la négation de « P ou Q » est « *non*(P) et *non*(Q) »
10. $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1 \neq 0$ ou $x + 2 \neq 0)$.
11. $(\forall x \in R, x + 1 \neq 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, x + 2 \neq 0)$.
12. $\exists (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \sqrt{n} + \sqrt{m} = 0$ et $(n \neq 0$ ou $m \neq 0)$.
    En effet, « $\sqrt{n} + \sqrt{m} = 0 \Rightarrow n = m = 0$ » peut se réécrire $\sqrt{n} + \sqrt{m} = 0 \Rightarrow (n = 0$ et $m = 0)$.
13. $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, |x - y| \leq 1$.
14. $\exists M > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, (x > x_0$ et $f(x) \leq M)$.
    En effet, $\forall M > 0$ se réécrit $\forall M \in \mathbb{R}_+^*$, donc en passant à la négation, on obtient $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire $\exists M > 0$.

Exercice 7. Écrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes.

1. L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.
2. L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
3. Pour tout réel strictement positif ε, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N, on a $|1/n| < \varepsilon$.
4. Tous les nombres réels positifs sont le carré d'au moins un nombre réel.
5. Tout nombre rationnel r s'écrit sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où p appartient à $\mathbb{Z}$ et q appartient à $\mathbb{N}^*$.
6. Pour tout nombre réel non nul, il existe un nombre réel tel que le produit des deux nombres vaut 1.

---

1. $\exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
2. La proposition n'est pas assez précise, complétons-la : L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
3. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq N \Rightarrow |1/n| < \varepsilon)$.
   La lettre grecque ε se prononce « epsilon ».
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$.
5. $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\exists p \in \mathbb{Z}$, $\exists q \in \mathbb{N}^*$, $r = \dfrac{p}{q}$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}$, $xy = 1$.