Feuille de TD n° 3

Vocabulaire sur les fonctions et trigonométrie

17 mars 2021

Vocabulaire : Donner \给\, Étudier la parité d'une fonction : dire si la fonction est paire ou impaire, Calculer \计算\, Résoudre \求解\.

Résolution d'équations trigonométriques. (À connaître)

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi$ ou $\exists\, k \in \mathbb{Z}, x = -y + 2k\pi$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi$, ou $\exists\, k \in \mathbb{Z}, x = \pi - y + 2k\pi$.
- $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}\right)^2$, $\tan(x) = \tan(y) \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, x = y + k\pi$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère les propositions suivantes.

- P_1 : « La fonction f s'annule ».
- P_2 : « La fonction f est minorée par 1 ».
- P_3 : « Il existe un nombre réel positif x tel que $f(x)$ est positif ».
- P_4 : « La fonction f prend des valeurs aussi grandes que l'on veut ».

1. Exprimer chacune des propositions avec des quantificateurs.
2. Donner avec des quantificateurs la négation de chacune de ces propositions.
3. Pour chacune des propositions, donner un exemple de fonction non constante telle que la proposition soit vraie puis deux exemples de fonctions non constantes telles que la proposition soit fausse.

Exercice 2.

1. Étudier la parité des fonctions suivantes :
   (a) $f_1(x) = \sin(2x)\cos(x)$,
   (b) $f_2(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$,
   (c) $f_3(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$,
2. Montrer que la fonction $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto \sin(2x) - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ est 4π-périodique.

Exercice 3.

1. Donner la valeur de $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$, puis celle de $\sin\left(-\frac{43\pi}{6}\right)$.
2. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ tel que $\cos(x) = -\frac{4}{5}$. Calculer $\sin(x)$.
3. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, puis $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
2. $\tan(x) = \sqrt{3}$,
3. $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{1}{4}$.
4. $\sin(5x) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right)$,
5. $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$,
6. $\cos(2x) = \cos^2(x)$,
7. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$,
8. $|\cos(nx)| = 1$, où $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5 (Bonus)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

- f est **injective**, si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \big(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\big)$;
- f est **surjective**, si $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$;
- f est **bijective**, si $\forall y \in \mathbb{R}, \exists\,!\, x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.

1. Donner un exemple d'une fonction injective, surjective et bijective.
2. Donner un exemple d'une fonction injective et non surjective.
3. Donner un exemple d'une fonction surjective et non injective.
4. Une fonction peut-elle être surjective et injective mais non bijective ?