Feuille de TD n° 3 - Correction

Vocabulaire sur les fonctions et trigonométrie

19 mars 2021

Vocabulaire : Donner \给\, Étudier la parité d'une fonction : dire si la fonction est paire ou impaire, Calculer \计算\, Résoudre \求解\.

Résolution d'équations trigonométriques. (À connaître)

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi$ ou $\exists\, k \in \mathbb{Z}, x = -y + 2k\pi$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi$, ou $\exists\, k \in \mathbb{Z}, x = \pi - y + 2k\pi$.
- $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}\right)^2$, $\tan(x) = \tan(y) \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, x = y + k\pi$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère les propositions suivantes.

- P_1 : « La fonction f s'annule ».
- P_2 : « La fonction f est minorée par 1 ».
- P_3 : « Il existe un nombre réel positif x tel que $f(x)$ est positif ».
- P_4 : « La fonction f prend des valeurs aussi grandes que l'on veut ».

1. Exprimer chacune des propositions avec des quantificateurs.
2. Donner avec des quantificateurs la négation de chacune de ces propositions.
3. Pour chacune des propositions, donner un exemple de fonction non constante telle que la proposition soit vraie puis deux exemples de fonctions non constantes telles que la proposition soit fausse.

1.
   - $P_1 : \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
   - $P_2 : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$.
   - $P_3 : \exists x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq 0$.
   - $P_4 : \forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq A$.
2.
   - $non(P_1) : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
   - $non(P_2) : \exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 1$.
   - $non(P_3) : \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) < 0$.
   - $non(P_4) : \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < A$ (cela signifie que la fonction f est majorée).
3.

	P_i	$non(P_i)$
1	$f : x \longmapsto x+1$	$f : x \longmapsto e^x$, $f : x \longmapsto -x^2 - 1$
2	$f : x \longmapsto \cos(x) + 2$	$f : x \longmapsto \cos(x)$, $f : x \longmapsto x^2$
3	$f : x \longmapsto x^3$	$f : x \longmapsto -x-1$, $f : x \longmapsto -(x+2)(x+1)$
4	$f : x \longmapsto \ln(x)$	$f : x \longmapsto \sin(x)$, $f : x \longmapsto -e^x$

Exercice 2.

1. Étudier la parité des fonctions suivantes :
   (a) $f_1(x) = \sin(2x)\cos(x)$,
   (b) $f_2(x) = e^x - e^{-x}$,

(c) $f_3(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$,

2. Montrer que la fonction $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \sin(2x) - 2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est 4π-périodique.

---

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_1(-x) = \sin(-2x)\cos(-x) = -\sin(2x)\cos(x) = f_1(x)$$
car cos est paire et sin est impaire. Donc f_1 est une fonction impaire.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_2(-x) = e^{-x} - e^{-(-x)} = -(e^x - e^{-x}) = -f_2(x).$$
Donc f_2 est une fonction impaire.

   (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f_3(-x) &= \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} \\ &= \frac{e^{-2x}e^x}{(e^{-x}(1+e^x))^2} \\ &= \frac{e^{-2x}e^x}{e^{-2x}(1+e^x)^2} \\ &= \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= f_3(x). \end{aligned}$$
Donc f_3 est une fonction paire.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f_4(x+4\pi) &= \sin(2(x+4\pi)) - 2\cos\left(\frac{x+4\pi}{2}\right) \\ &= \sin(2x + 4\times 2\pi) - 2\cos\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) \\ &= \sin(2x) - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right), \end{aligned}$$
par 2π-périodicité des fonctions sin et cos.
Donc la fonction f_4 est 4π-périodique.

Exercice 3.

1. Donner la valeur de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$, puis celle de $\sin\left(-\dfrac{43\pi}{6}\right)$.
2. Soit $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ tel que $\cos(x) = -\dfrac{4}{5}$. Calculer $\sin(x)$.
3. Calculer $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, puis $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

1.
$$\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4} - 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Ce résultat se lit facilement sur un dessin.
$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{43\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{(6\times 7+1)\pi}{6}\right) = \sin\left(-7\pi - \frac{\pi}{6}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{6} + 7\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. On a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
Donc $\sin^2(x) = 1 - \left(-\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$, et donc $|\sin(x)| = \dfrac{3}{5}$.
Comme $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\sin(x) \geq 0$, donc $\sin(x) = \dfrac{3}{5}$.

3. On a $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$.
   À partir des formules de trigonométrie, on obtient donc
   -
$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$
   -
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$
   -
$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\\ &= \frac{6 - 2\sqrt{6}\sqrt{2} + 2}{4}\\ &= 2 - \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
2. $\tan(x) = \sqrt{3}$,
3. $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{1}{4}$.
4. $\sin(5x) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right)$,
5. $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$,
6. $\cos(2x) = \cos^2(x)$,
7. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$,
8. $|\cos(nx)| = 1$, où $n \in \mathbb{Z}$.

---

1. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{1}{4}\\ &\Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{5\pi}{12} + k\pi\end{aligned}$$
   L'ensemble des solutions est donc
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}+x\right) &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 5x = \frac{2\pi}{3} + x + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, 5x = \pi - \frac{2\pi}{3} - x + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est donc
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
5. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4) &\Leftrightarrow \cos(2x-\pi/3) = \cos(\pi/2 - x - 3\pi/4) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2x - \frac{\pi}{3} = -x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, 2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi.\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est donc
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k_i n\mathbb{Z}\right\}.$$
6. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}\cos(2x) = \cos^2(x) &\Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi.\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est donc
$$\mathcal{S} = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \pi\mathbb{Z}.$$
7. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\sin(x) + \sin(3x) = 2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) = 2\sin(2x)\cos(x)$.
Donc $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 2\sin(2x)\cos(x) + \sin(2x) = \sin(2x)(2\cos(x)+1)$.
Ainsi
$$\begin{aligned}\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0 &\Leftrightarrow \sin(2x)(2\cos(x)+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.\end{aligned}$$
Donc l'ensemble des solutions est
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
8. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}|\cos(nx)| = 1 &\Leftrightarrow \cos(nx) = 1 \text{ ou } \cos(nx) = -1 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, nx = k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{n}k.\end{aligned}$$
Donc l'ensemble des solutions est
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{n}k, k \in \mathbb{Z}\right\} = \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}.$$

Exercice 5 (Bonus)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que
- f est **injective**, si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \big(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\big)$;
- f est **surjective**, si $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$;
- f est **bijective**, si $\forall y \in \mathbb{R}, \exists!\, x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.

1. Donner un exemple d'une fonction injective, surjective et bijective.
2. Donner un exemple d'une fonction injective et non surjective.
3. Donner un exemple d'une fonction surjective et non injective.
4. Une fonction peut-elle être surjective et injective mais non bijective ?

---

1. La fonction identité id : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto x$ est injective, surjective et bijective.
2. La fonction exponentielle est injective et non surjective : pour $y = -1$, on peut pas trouver de nombre réel x tel que $\exp(x) = -1$ puisque exp est à valeurs strictement positives.
3. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto x(x-1)(x-2)$ est surjective (se voit sur un tableau de variations : elle prend toutes les valeurs dans $\mathbb{R}$) et non injective : $f(1) = f(2)$ mais $1 \neq 2$.
4. Non, une fonction surjective et injective est bijective. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la surjectivité donne l'existence d'un nombre réel x tel que $f(x) = y$ et l'injectivité donne l'unicité de ce nombre réel x.