Feuille de TD n° 4

Raisonnements et trigonométrie

25 mars 2021

Exercice 1. Les démonstrations suivantes sont-elles correctes ?

1. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est un multiple de 3.
   Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $n = 4$.
   On a alors $n^3 - n = 4^3 - 4 = 4(4^2 - 1) = 4 \times 15 = 3 \times 4 \times 5$.
   Donc $n^3 - n$ est un multiple de 3.
   D'où le résultat.
2. Démontrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 - n$ n'est pas un multiple de 3.
   Preuve : Posons $n = 2$.
   On a alors $n^2 - n = 4 - 2 = 2$ et 2 n'est pas un multiple de 3.
   Donc $n^2 - n$ n'est pas un multiple de 3.
   D'où le résultat.

Exercice 2. La démonstration suivante est fausse. Sur quelle ligne est l'erreur ?

1. Soient a et b deux nombres réels. Supposons que $a = b$.
2. En multipliant par a, on obtient $a^2 = ab$,
3. donc $a^2 - b^2 = ab - b^2$.
4. En factorisant, on en déduit que $(a + b)(a - b) = b(a - b)$,
5. puis, en simplifiant par $a - b$, on obtient $a + b = b$,
6. et donc $a = 0$.
7. a étant un nombre réel quelconque, tout nombre réel est donc nul.

Exercice 3. Démontrer la proposition suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\ x - y = 1$.

Exercice 4.

1. L'objectif de cette question est de démontrer la proposition « la somme de deux fonctions croissantes est une fonction croissante ».
   (a) Reformuler cette proposition :
   Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et toute fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
   si .... alors ....
   (b) Quelle est l'hypothèse ? L'écrire avec des quantificateurs.
   (c) Quelle est la conclusion ? L'écrire avec des quantificateurs.
   (d) Compléter la démonstration suivante :

   Soient ....
   Supposons .... Montrons ....
   Soient x et y deux nombres réels tels que ....
   Comme f est ...., on a ....
   Comme g est ...., on a ....
   On en déduit que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ....
   Donc ....
2. La proposition « la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est une fonction monotone » est-elle vraie ? Justifier.
3. (a) Quelle proposition semble être démontrée ci-dessous ?

   f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
   k un nombre réel négatif
   f croissante
   $x, y \in \mathbb{R}$
   $x \leq y$
   $f(x) \leq f(y)$
   $kf(x) \geq kf(y)$

   (b) Compléter la démonstration avec des phrases et des liens logiques. Exprimer clairement la conclusion.
4. La proposition « le produit de deux fonctions croissantes est une fonction monotone » est-elle vraie ? Justifier.
5. Montrer que le produit de deux fonctions croissantes et positives est une fonction croissante.

Exercice 5.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Écrire sous la forme $A\cos(x-\varphi)$ l'expression $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$.
   (b) Écrire sous la forme $A\sin(x+\psi)$ l'expression $\sqrt{2}\cos(x) + \sqrt{6}\sin(x)$.
2. (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation

$$2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0.$$

   (b) Considérons l'équation

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = m. \quad (E)$$

   Pour quelles valeurs de m l'équation (E) admet-elle des solutions ? Les déterminer lorsque $m = \sqrt{2}$.

Exercice 6 (Bonus)**.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle si, par définition,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon).$$

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Démontrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq |v_n|$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle.
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Démontrer que si $(u_n)_{n\in}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent une limite nulle, alors la somme $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle.