Feuille de TD n° 4

Raisonnements et trigonométrie

26 mars 2021

Exercice 1. Les démonstrations suivantes sont-elles correctes ?

1. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est un multiple de 3.
   Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $n = 4$.
   On a alors $n^3 - n = 4^3 - 4 = 4(4^2 - 1) = 4 \times 15 = 3 \times 4 \times 5$.
   Donc $n^3 - n$ est un multiple de 3.
   D'où le résultat.
2. Démontrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 - n$ n'est pas un multiple de 3.
   Preuve : Posons $n = 2$.
   On a alors $n^2 - n = 4 - 2 = 2$ et 2 n'est pas un multiple de 3.
   Donc $n^2 - n$ n'est pas un multiple de 3.
   D'où le résultat.

---

1. Cette preuve n'est pas correcte. Elle montre que $4^3 - 4$ est un multiple de 3 mais ne montre pas le résultat pour tous les entiers n.
2. Cette preuve est correcte. Elle donne une valeur de n ($n = 2$) telle que $n^2 - n$ n'est pas un multiple de 3.

Exercice 2. La démonstration suivante est fausse. Sur quelle ligne est l'erreur ?

1. Soient a et b deux nombres réels. Supposons que $a = b$.
2. En multipliant par a, on obtient $a^2 = ab$,
3. donc $a^2 - b^2 = ab - b^2$.
4. En factorisant, on en déduit que $(a + b)(a - b) = b(a - b)$,
5. puis, en simplifiant par $a - b$, on obtient $a + b = b$,
6. et donc $a = 0$.
7. a étant un nombre réel quelconque, tout nombre réel est donc nul.

Ligne 5 : on ne peut pas simplifier par $a = b$, car $a - b = 0$!

Exercice 3. Démontrer la proposition suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\ x - y = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Posons $y = x - 1 \in \mathbb{R}$.

Alors $x - y = x - (x - 1) = 1$.

D'où le résultat.

Exercice 4.

1. L'objectif de cette question est de démontrer la proposition « la somme de deux fonctions croissantes est une fonction croissante ».
   (a) Reformuler cette proposition :
   Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et toute fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
   si .... alors ....

(b) Quelle est l'hypothèse ? L'écrire avec des quantificateurs.

(c) Quelle est la conclusion ? L'écrire avec des quantificateurs.

(d) Compléter la démonstration suivante :

Soient ....
Supposons .... Montrons ....
Soient x et y deux nombres réels tels que ....
Comme f est ...., on a ....
Comme g est ...., on a ....
On en déduit que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ....
Donc ....

2. La proposition « la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est une fonction monotone » est-elle vraie ? Justifier.
3. (a) Quelle proposition semble être démontrée ci-dessous ?

f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
k un nombre réel négatif
f croissante
$x,\, y \in \mathbb{R}$
$x \leq y$
$f(x) \leq f(y)$
$kf(x) \geq kf(y)$

(b) Compléter la démonstration avec des phrases et des liens logiques. Exprimer clairement la conclusion.

4. La proposition « le produit de deux fonctions croissantes est une fonction monotone » est-elle vraie ? Justifier.
5. Montrer que le produit de deux fonctions croissantes et positives est une fonction croissante.

---

1. (a) Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et toute fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, si f et g sont croissantes alors $f+g$ est croissante.
   (b) L'hypothèse est : f et g sont croissantes.
   $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y \Rightarrow g(x) \leq g(y))$
   (c) La conclusion est : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y \Rightarrow (f+g)(x) \leq (f+g)(y)$.
   (d) Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.
   Supposons f et g croissantes. Montrons que $f+g$ est croissante.
   Soient x et y deux nombres réels tels que $x \leq y$.
   Comme f est croissante, $f(x) \leq f(y)$.
   Comme g est croissante, $g(x) \leq g(y)$.
   On en déduit que $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y) = (f+g)(y)$.
   Donc $f+g$ est croissante.
2. La proposition est fausse. Donnons un contre-exemple. La fonction $x \longmapsto x^3$ est croissante et la fonction $x \longmapsto -x$ est décroissante. La somme de ces deux fonctions est la fonction $x \longmapsto x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$ qui n'est ni croissante, ni décroissante.
3. (a) Le produit d'une fonction croissante par un nombre réel négatif est une fonction décroissante.
   Dit autrement, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{R}_-$, si f est croissante alors $x \longmapsto kf(x)$ est une fonction décroissante.
   (b) Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit k un nombre réel négatif.
   Supposons f croissante. Montrons que la fonction $x \longmapsto kf(x)$ est décroissante.
   Soient x et y deux nombres réels tels que $x \leq y$.
   Comme f est croissante, on a $f(x) \leq f(y)$.
   Comme k est un nombre réel négatif, on obtient alors $kf(x) \geq kf(y)$.
   Donc la fonction $x \longmapsto kf(x)$ est décroissante.
4. La proposition est fausse. Donnons un contre-exemple. La fonction $f : x \longmapsto x$ est croissante mais le produit de la fonction f par elle-même $(f \times f)$, $x \longmapsto x \times x = x^2$ n'est pas monotone.
5. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Supposons f et g croissantes et positives. Montrons que le produit $f \times g$ est une fonction croissante.
   Soient x et y deux nombres réels tels que $x \leq y$.
   Comme f est croissante et positive, on a $0 \leq f(x) \leq f(y)$.
   Comme g est croissante et positive, on a $0 \leq g(x) \leq g(y)$.
   Donc $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \leq f(y) \times g(y) = (f \times g)(y)$.
   Donc la fonction $f \times g$ est croissante.

Exercice 5.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Écrire sous la forme $A\cos(x-\varphi)$ l'expression $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$.
   (b) Écrire sous la forme $A\sin(x+\psi)$ l'expression $\sqrt{2}\cos(x) + \sqrt{6}\sin(x)$.
2. (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation
$$2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0.$$
   (b) Considérons l'équation
$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = m. \quad (E)$$
   Pour quelles valeurs de m l'équation (E) admet-elle des solutions ? Les déterminer lorsque $m = \sqrt{2}$.

---

1. (a) On a
$$\begin{aligned}\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) &= \sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\left(\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right)\\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)\right)\\ &= 2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$
   Si on veut la forme $A\cos(x-\varphi)$, on peut par exemple écrire
$$\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos\left(x - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
   ou
$$\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos\left(x - \frac{5\pi}{3}\right).$$
   (b) On a
$$\begin{aligned}\sqrt{2}\cos(x) + \sqrt{6}\sin(x) &= \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\cos(x) + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}\sin(x)\right)\\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right)\\ &= 2\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)\\ &= 2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned}2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x) &= \sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x)\\ &= 2\left(\frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)\right)\\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2x)\right)\\ &= 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$
   Donc
$$\begin{aligned}2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0 &\Leftrightarrow 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k.\end{aligned}$$
   L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)\right)\\ &= 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

Donc $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = m \Leftrightarrow \cos(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{m}{2}$.
Comme $\cos(x + \frac{\pi}{6}) \in [-1, 1]$, l'équation (E) admet des solutions si et seulement si $\frac{m}{2} \in [-1, 1]$, soit si et seulement si $m \in [-2, 2]$.
Supposons que $m = \sqrt{2}$.
Alors

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = m &\Leftrightarrow \cos(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{-5\pi}{12} + 2k\pi.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{\frac{\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{-5\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 6 (Bonus)**.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle si, par définition,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon).$$

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Démontrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq |v_n|$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle.
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Démontrer que si $(u_n)_{n\in}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent une limite nulle, alors la somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle.

---

1. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq |v_n|$ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle. On sait donc que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $|v_n| < \varepsilon$.
   Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle.
   Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $|v_n| < \varepsilon$.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq |v_n|$.
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $|u_n| \leq |v_n| < \varepsilon$.
   On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $|u_n| < \varepsilon$.
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle.
2. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent une limite nulle.
   Montrons que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle, (en prenant $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$) il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N_1$ alors $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle, (en prenant $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$) il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N_2$ alors $|v_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $n \geq N_1$ donc $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ et on a $n \geq N_2$ donc $|v_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$, alors

   $$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

   On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $|u_n + v_n| < \varepsilon$. Donc la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle.