TD 4. Sciences en français

Exercice 2

factoriser $\qquad a \times b + a \times c = a(b+c)$

" On factorise par a "

" a facteur de b+c ".

simplifier $\qquad \cancel{2} \times x = \cancel{2} \times (x+1)$ $\qquad$ on simplifie par 2.

$x = x+1$

$ax = ay$

si $\underline{\underline{a \neq 0}}$ alors $x = y$

Si $a = 0$, $0 \times 2 = 0 \times 3$

~~donc 2 = 3~~

Exercice 3

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$.

Posons $y = x - 1 \in \mathbb{R}$.

On a $x - y = x - (x-1) = 1$.

D'où le résultat.

$x - y = 1$

$y = x - 1$

Exercice 4

somme de f et de g :

$f+g$

produit de f et de g

$f \times g$.

1. a) Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si f est croissante et g est croissante alors $f+g$ est croissante

conclusion

hypothèse

b) $\underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}}_{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y \Rightarrow g(x) \leq g(y)$

But || c) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y \Rightarrow (f+g)(x) \leq (f+g)(y)$

d) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

Supposons f croissante et g croissante.

Montrons que $f+g$ est croissante.

Soient x et y deux nombres réels tels que $x \leq y$.

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Comme f est croissante, on a $f(x) \leq f(y)$

Comme g est croissante, on a $g(x) \leq g(y)$

On en déduit que

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y) = (f+g)(y).$$

Donc $f+g$ est croissante.

2. Faux. Donnons un contre-exemple.

Posons $f : x \mapsto x$, alors f est croissante

et $g : x \mapsto -\exp(x)$, alors g est décroissante.

$-x^3$

Or $f+g : x \mapsto x - \exp(x)$ n'est pas monotone.

Donc la proposition est fausse.

3. a) Le produit d'une fonction croissante et d'un nombre réel négatif est une fonction décroissante.

ou : Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{R}_-$,

si f est croissante alors kf est décroissante.

Hypothèse

b) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{R}_-$.

Supposons f croissante. (Montrons que kf est décroissante) $(x \leq y \Rightarrow kf(x) \geq kf(y))$

Soit x et y des nombres réels tels que $x \leq y$

Comme f est croissante, on a $f(x) \leq f(y)$

f étant croissante

Donc $kf(x) \geq kf(y)$ car k est négatif.

Donc kf est décroissante.

4. Faux. Donnons un contre-exemple.

Prenons $f : x \mapsto x$, alors f est croissante

et $g : x \mapsto x$, alors g est croissante.

Or $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = x \times x = x^2$ et donc $f \times g$ n'est pas monotone.

5. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si [$f$ est croissante et positive, et g est croissante et positive] alors $f \times g$ est croissante.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

Supposons f et g croissantes et positives.

Montrons que $f \times g$ est croissante.

But : $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \leq y \Rightarrow (f \times g)(x) \leq (f \times g)(y) \right)$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$.

Comme f est croissante et positive, on a $0 \leq f(x) \leq f(y)$

Comme g est croissante et positive, on a $0 \leq g(x) \leq g(y)$.

Donc $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \leq f(y) \times g(y) = (f \times g)(y)$

Donc $f \times g$ est croissante.

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin(x) \right)$$

Exercice 5.

1\. a) $$\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 2\left(\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) \right)$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x) \right)$$
$$= 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{Tb}$$

$$= 2\cos\Big(x - \underbrace{\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{\varphi}\Big)$$

ou $= 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3} - 2\pi\right) = 2\cos\left(x - \frac{5\pi}{3}\right)$

b) $\sqrt{2}\cos(x) + \sqrt{6}\sin(x) = \underbrace{\sqrt{8}}_{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right)$

$$= 2\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

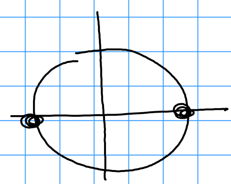
2. a) $2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x)$

$$= \sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2x)\right)$$

$$= 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$



$2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0$

ssi $\quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

ssi $\quad 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

ssi $\quad x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. b) $m \in [-2, 2]$.

On a $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)\right)$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)$$

$$= 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

Donc $(E) \iff \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{m}{2} \in [-1,1]$

Donc l'équation admet des solutions ssi $m \in [-2,2]$.

Si $m = \sqrt{2}$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ssi $x+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

ou $x+\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

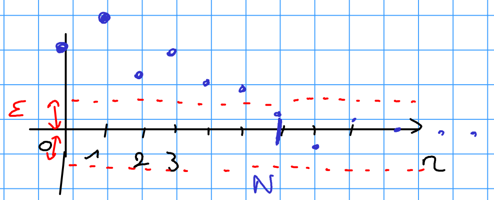
ssi $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

$$S = \left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Exercice 6

$|u_n| < \varepsilon$



1. Supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n| \le |v_n|$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle.

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle.

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ (n\ge N \Rightarrow |u_n|<\varepsilon)$

Soit $\varepsilon > 0$.

Par hypothèse, on sait que

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |v_n| < \varepsilon)$

Pour $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$, il existe donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N_0$ alors $|v_n| < \varepsilon_0$.

Posons $N = N_0 \in \mathbb{N}$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N = N_0$, alors

$$|u_n| \leq |v_n| < \varepsilon_0 .$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle.

2. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent une limite nulle.

Montrons que $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |u_n+v_n| < \varepsilon)$

Soit $\varepsilon_0 > 0$.

On sait que :

(H1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N_1 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon)$

(H2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N_2 \Rightarrow |v_n| < \varepsilon)$

En particulier, pour $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} > 0$ il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N_1$, alors $|u_n| < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N_2$ alors $|v_n| < \frac{\varepsilon_0}{2}$

Posons $\underbrace{N = \max(N_1, N_2)}_{\text{maximum}} \in \mathbb{N}$

$(N \geq N_1$ et $N \geq N_2)$

$\underbrace{|u_n+v_n| \leq |u_n|+|v_n|}_{\text{inégalité triangulaire}}$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$, alors

$$|u_n+v_n| \leq |u_n|+|v_n| < \underset{\text{car } n \geq N_1}{\frac{\varepsilon_0}{2}} + \underset{\text{car } n \geq N_2}{\frac{\varepsilon_0}{2}} = \cancel{2}\,\varepsilon_0 .$$

Donc $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle.