Feuille de TD n° 5

Raisonnements classiques

29 mars 2021

Exercice 1 (Disjonction de cas)**.**

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 4 divise n^2 ou 4 divise $n^2 - 1$.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

Exercice 2. Démontrer par contraposée les propositions suivantes :

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $x \neq y$ alors $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
2. Soit x un réel. Si, pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$, alors $x = 0$.

Exercice 3. Démontrer par l'absurde que si n est le carré d'un nombre entier non nul alors $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier.

Exercice 4. Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est un multiple de 3.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.
5. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le suite définie par $v_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $v_{n+1} = \displaystyle\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k$.
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 3n$.

Exercice 5. Démontrer par analyse-synthèse les propositions suivantes :

1. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit, de façon unique, comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
   Autrement dit, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe une unique fonction paire $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = g + h$.
2. Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$