TD5 _ Sciences en français _ Maths .

1 . Soit $n \in \mathbb{N}$.

- 1^{er} cas : n est pair . Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
  Donc $n^2 = 4k^2$, donc 4 divise n^2.
- 2^{nd} cas : n est impair . Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.
  Donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$,
  donc $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4 \times (k^2 + k)$ et $k^2 + k \in \mathbb{N}$

  "facteur de"
  ou "fois"

  donc 4 divise $n^2 - 1$.
- Ainsi, dans tous les cas, 4 divise n^2 ou 4 divise $n^2 - 1$.

  D'où le résultat.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2 . Soit $x \in \mathbb{R}$.

- 1^{er} cas : $x \geq 1$. Alors $|x-1| = x - 1$.

$x - 1 \geq 0$

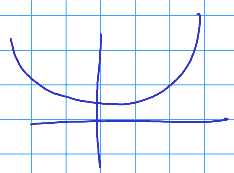
On a $x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - (x-1)$

$x - 1 \leq x^2 - x + 1$

$= x^2 - x + 1 - x + 1$

$= x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$

≥ 0



Le discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$

Delta

Donc $x^2 - x + 1 \geq |x - 1|$.

- 2^{nd} cas : $x < 1$. Alors $|x-1| = -(x-1) = -x+1$.

$(x - 1 < 0)$

Le signe : positif ou négatif

On a $x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 + x - 1$

$= x^2 \geq 0$

Donc $x^2 - x + 1 \geq |x - 1|$.

. Donc, dans tous les cas, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.
D'où le résultat.

Exercice 2

1. ~~Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$~~ (déjà dans l'énoncé)

Supposons $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$. Montrons que $x = y$.

On a donc $\cancel{xy} - x + y \cancel{-1} = \cancel{xy} + x - y \cancel{-1}$ (on développe)

et donc $2x = 2y$.

Donc $x = y$.

Donc, par contraposée, si $x \neq y$, alors $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

2. ε : epsilon $P \Rightarrow Q$. Supposons non(Q). Montrons non(P)

Supposons $x \neq 0$.

Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x| \geq \varepsilon$.

Posons $\varepsilon = \dfrac{|x|}{2}$.

Alors $\varepsilon > 0$ et $|x| \geq \dfrac{|x|}{2} = \varepsilon$

Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x| \geq \varepsilon$.

Donc par contraposée, si pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$ alors $x = 0$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que n est le carré d'un nombre entier non nul. Montrons que $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier.

Supposons, par l'absurde, que $2n$ est le carré d'un nombre entier.

On sait qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = k^2$.

Par hypothèse, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $2n = p^2$.

Donc $2k^2 = p^2$, donc $2 = \frac{p^2}{k^2}$ $(k \neq 0)$,

donc $\sqrt{2} = \frac{p}{k}$. Ceci est absurde car $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Donc $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier.

D'où le résultat.

Exercice 4

1. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ la propriété :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

• Initialisation : Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$.

D'où $P(1)$.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

On a $\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} k^2}_{1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$

$= (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2$

numérateur

$\frac{p}{q}$

dénominateur

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$$

factoriser

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

D'où $P(n+1)$.

Donc, par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ la propriété « $4^n + 5$ est un multiple de 3 ».

• Initialisation : Pour $n = 0$, $4^0 + 5 = 6 = 2 \times 3$.
Donc $4^0 + 5$ est un multiple de 3. D'où $P(0)$.

. Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, $4^n + 5$ est un multiple de 3, donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $4^n + 5 = 3k$.

On a
$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 5 &= 4 \times 4^n + 5 \\ &= 4 \times (3k - 5) + 5 \\ &= 4 \times 3k - 15 \\ &= 3 \times \underbrace{(4k - 5)}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$
et $4k - 5 \in \mathbb{Z}$.

Donc $4^{n+1} + 5$ est un multiple de 3.
D'où $P(n+1)$.

Donc par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

Exercice 5

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

• Analyse. Supposons qu'il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire telle que $f = g + h$. $(*)$

trouver des propriétés.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)$.

et $f(-x) = g(-x) + h(-x)$ (d'après (*))

donc $f(-x) = g(x) - h(x)$.

On a donc $\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

• Synthèse. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x).$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$g(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$. Donc g est paire.

De même, on montre que h est impaire.

D'où le résultat.