Feuille de TD n° 5 - Opérations des matrices

2 avril 2021

Exercice 1. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB = A + B$$

Calculer $(I_n - A) \cdot (I_n - B)$. En déduire que A et B commutent.

Exercice 2. Soit $n \geq 2$. On note $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $I_n + E_{ij}$ est inversible.
2. Quelles sont les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?
   Indice : considérons les $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.
3. Quelles sont les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?

Exercice 3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A + I)^3$.
2. En déduire que A est inversible.

Exercice 4. On considère l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

On note $+$ l'addition des matrices, $\times$ la multiplication des matrices, et $\cdot$ le produit d'un scalaire de $\mathbb{K}$ et d'une matrice.

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et donner une base de F. Quelle est la dimension de F ?
2. Montrer que F est stable par $\times$.
3. Montrer que $(F, +, \times)$ est un anneau. Est-il commutatif ?
4. Trouver les éléments inversibles de F et calculer leur inverse.

Exercice 5.

1. Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant
   $$AB - BA = I_n?$$
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices vérifiant
   $$AB - BA = A.$$
   Calculer $\mathrm{Tr}\,(A^p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$