# Feuille de TD n° 5 - Correction
2 avril 2021

---

**Exercice 1.** Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB = A + B$$

Calculer $(I_n - A) \cdot (I_n - B)$. En déduire que $A$ et $B$ commutent.

---

On a $(I_n - A) \cdot (I_n - B) = I_n$ donc $I_n - A$ et $I_n - B$ sont inversibles et inverses l'une de l'autre. Donc $I_n = (I_n - B) \cdot (I_n - A) = I_n - A - B - BA$, d'ou $AB = BA = A + B$.

**Exercice 2.** Soit $n \geq 2$. On note $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $I_n + E_{ij}$ est inversible.
2. Quelles sont les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ?
   Indice : considérons les $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.
3. Quelles sont les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ?

---

1. Si $i \neq j$, alors $(I+E_{i,j})(I-E_{i,j}) = I - E_{i,j}^2 = I$. Si $i = j$, alors $(I+E_{i,i})(I - \frac{1}{2}E_{i,i}) = I$. Donc dans ces deux cas $I + E_{i,j}$ sont inversibles.
2. Soit $A$ commutant à toute les matrices. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a
   $$AE_{i,i} = E_{i,i}A.$$
   Or toute les colonnes de la matrice de gauche sont nulles sauf la $i$-ième qui est égale à la $i$-ième colonne de la matrice $A$. De même toute les lignes de la matrice de droite sont nulles sauf la $i$-ième qui est égale à la $i$-ième ligne de la matrice $A$. Donc le seul coefficient non nul de la matrice est le coefficient de coordonnée $(i,i)$. Donc la matrice $A$ est diagonale.
   Enfin, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a
   $$AE_{i,j} = a_{i,i}E_{i,j} \quad \text{et} \quad E_{i,j}A = a_{j,j}E_{i,j}.$$
   Donc $a_{i,i} = a_{j,j}$. D'où $A = \lambda I$.
   De plus, toute matrice de la forme $\lambda I$ commute avec toute les matrices. Donc l'ensemble des matrice $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est
   $$\{\lambda I,\ \lambda \in \mathbb{K}\}.$$
3. Soit $A$ commutant à toute les matrices inversibles. On a donc pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ :
   $$A(I + E_{i,j}) = (I + E_{i,j})A.$$
   Donc
   $$AE_{i,j} = E_{i,j}A.$$
   Donc d'après la question précédente $A$ est égal à $\lambda I$.

**Exercice 3.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A+I)^3$.
2. En déduire que $A$ est inversible.

---

1. $A + I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donc
   $$(A+I)^3 = (A+I)^2(A+I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Les matrices $A$ et $I$ commutent. On a donc
   $$0 = (A+I)^3 = I + 3A + 3A^2 + A^3.$$
   D'où
   $$A(-3I - 3A - A^2) = I.$$
   Donc $A$ est inversible et d'inverse $-3I - 3A - A^2$.

**Exercice 4.** On considère l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

On note $+$ l'addition des matrices, $\times$ la multiplication des matrices, et $\cdot$ le produit d'un scalaire de $\mathbb{K}$ et d'une matrice.

1. Montrer que $F$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et donner une base de $F$. Quelle est la dimension de $F$ ?
2. Montrer que $F$ est stable par $\times$.
3. Montrer que $(F, +, \times)$ est un anneau. Est-il commutatif ?
4. Trouver les éléments inversibles de $F$ et calculer leur inverse.

---

Dans toute la suite on note $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

1. La partie $F$ est un sous-espace de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   — $F$ est non vide car $M(0,0,0) = 0$ appartient à $F$ ;
   — Soient $A = M(a,b,c)$ et $B = M(a',b',c')$ dans $F$ et $\lambda$ et $\mu$ dans $\mathbb{R}$. On a alors :
   $$\lambda A + \mu B = M(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c').$$
   Donc $\lambda A + \mu B$ appartient à $F$.

   Toute matrice $M(a,b,c)$ s'écrit de manière unique $aM(1,0,0) + bM(0,1,0) + cM(0,0,1)$. La famille $(M(1,0,0), M(0,1,0), M(0,0,1))$ forme donc une base de $F$ et $F$ est de dimension 3.
2. Soient $M(a,b,c)$ et $M(a',b',c')$ deux éléments de $F$. On a :
   $$\begin{aligned} M(a,b,c)M(a',b',c') &= \begin{pmatrix} aa' & ab'+a'b & bb'+ac'+a'c \\ 0 & aa' & ab'+a'b \\ 0 & 0 & aa' \end{pmatrix} \\ &= M(aa', ab'+a'b, bb'+ac'+a'c). \end{aligned}$$
   Donc $F$ est stable par multiplication.
3. Montrons que $F$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ :
   — $F$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel c'est donc un sous-groupe de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ;
   — $F$ est stable par multiplication ;
   — $F$ contient $I_3 = M(1,0,0)$.

   C'est donc un sous-anneau de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   De plus, la multiplication est commutative car $M(a,b,c)M(a',b',c') = M(aa', ab' + a'b, bb' + ac' + a'c) = M(a',b',c')M(a,b,c)$ (la formule est symétrique par rapport aux coefficients).
4. Remarquons que pour tout $b,c$ appartenant à $\mathbb{R}$, $M(0,b,c)$ n'est pas inversible. En effet,
   $$M(0,b,c)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$
   Supposons que $a \neq 0$. Montrer que pour tous $b,c \in \mathbb{R}$, $M(a,b,c)$ est inversible. On considère le système associé à la matrice :
   $$\begin{aligned} &\left\{\begin{array}{ccccccc} ax_1 & + & bx_2 & + & cx_3 & = & y_1 \\ 0 & + & ax_2 & + & bx_3 & = & y_2 \\ 0 & + & 0 & + & ax_3 & = & y_3 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow &\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 0 & + & 0 & = & \frac{1}{a}\left(y_1 - \frac{b}{a}\left(y_2 - \frac{b}{a}y_3\right) - \frac{c}{a}y_3\right) \\ 0 & + & x_2 & + & 0 & = & \frac{1}{a}\left(y_2 - \frac{b}{a}y_3\right) \\ 0 & + & 0 & + & x_3 & = & \frac{1}{a}y_3 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow &\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 0 & + & 0 & = & \frac{1}{a}\left(y_1 - \frac{b}{a}y_2 + \frac{b^2-ca}{a^2}y_3\right) \\ 0 & + & x_2 & + & 0 & = & \frac{1}{a}\left(y_2 - \frac{b}{a}y_3\right) \\ 0 & + & 0 & + & x_3 & = & \frac{1}{a}y_3 \end{array}\right. \end{aligned}$$
   D'où $M(a,b,c)$ est inversible et a pour inverse
   $$\frac{1}{a}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} & \frac{b^2-ca}{a^2} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   On pouvait aussi raisonner directement avec la formule obtenue dans la question 2.

**Exercice 5.**

1. Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant
   $$AB - BA = I_n?$$
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices vérifiant
   $$AB - BA = A.$$
   Calculer $\operatorname{Tr}(A^p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$

---

1. De telles matrices n'existent pas car
   $$\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$$
   et donc
   $$\operatorname{Tr}(AB - BA) = 0 \neq \operatorname{Tr}(I_n).$$
2. On a
   $$\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr}(AB - BA) = \operatorname{Tr}(AB) - \operatorname{Tr}(BA) = 0$$
   car $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

   Généralisons ce calcul
   $$\operatorname{Tr}(A^p) = \operatorname{Tr}\left(A^{p-1}(AB - BA)\right) = \operatorname{Tr}(A^pB) - \operatorname{Tr}\left(A^{p-1}BA\right).$$
   Or
   $$\operatorname{Tr}\left(A^{p-1}BA\right) = \operatorname{Tr}\left(\left(A^{p-1}B\right)A\right) = \operatorname{Tr}\left(A\left(A^{p-1}B\right)\right) = \operatorname{Tr}(A^pB),$$
   donc
   $$\operatorname{Tr}(A^p) = 0.$$