TD 5. Algèbre 2

$I_n \times M = M$ $\qquad M+N = N+M$

$M \times I_n = M$ $\qquad MN \neq NM$.

Exercice 1.

- $\underbrace{(I_n - A)}_{M}\underbrace{(I_n - B)}_{N} = I_n - B - A + A\times B = I_n - (A+B) + (A+B) = I_n$. $(*)$
- A et B commutent si $AB = BA$.

Rappel : $MN = I_n$ alors M est inversible d'inverse N

et $NM = MN = I_n$.

De $(*)$, on en déduit que $(I_n - B)(I_n - A) = (I_n - A)(I_n - B)$

Or $(I_n - B)(I_n - A) = I_n - A - B + BA$.

Donc $\cancel{I_n} - \cancel{A} - \cancel{B} + BA = \cancel{I_n} - \cancel{B} - \cancel{A} + AB$

D'où $BA = AB$. Donc A et B commutent.

$AB = A+B = B+A = BA$?

on ne le sait pas.

Exercice 3

1- $(A+I)^3$.

On a $A+I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A+I)^3 = (A+I)^2(A+I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $(A+I)^3 = O_3$.

Comme A et I commutent ($A \times I = I \times A = A$), on a

$(A+I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I_3$.

On cherche B telle que

$AB = I_3$

$= BA$

Donc $A^3 + 3A^2 + 3A + I = O_3$,

donc $-A^3 - 3A^2 - 3A = I_3$,

donc $A\underbrace{(-A^2 - 3A - 3\underline{\underline{I_3}})}_{B} = I_3$

$A - 3$ pas de sens

$A - 3I_3$.

Donc A est inversible d'inverse $-A^2 - 3A - 3I_3$.

Exercice 4

1. ① On vérifie la caractérisation ($F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $O_3 \in F$, F est stable par C.L)

ou ② Soit $M \in F$. On a $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $F = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N_2}\right)$.

Donc F est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc un $\mathbb{R}$-ev.

La famille (I_3, N_1, N_2) est une famille génératrice de F.

Montrons que cette famille est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 I_3 + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2 = O_3$.

Donc $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Donc (I_3, N_1, N_2) est une base de F.

F est donc de dimension 3.

2. Soient $M_1, M_2 \in F$. Montrons que $M_1 M_2 \in F$.

On a $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

On a $M_1 M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underbrace{a_1 a_2}_{a} & \overbrace{a_1 b_2 + a_2 b_1}^{b} & \overbrace{a_1 c_2 + b_1 b_2 + c_1 a_2}^{c} \\ 0 & \underbrace{a_1 a_2}_{a} & \underbrace{a_1 b_2 + a_2 b_1}_{b} \\ 0 & 0 & \underbrace{a_1 a_2}_{a} \end{pmatrix}$

Donc $M_1 M_2 \in F$. Donc F est stable par $\times$.

3. Montrons que F est un sous-anneau de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$.

- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in F$.
- F est stable par $\times$: cf q 2.
- Soient $M_1, M_2 \in F$. On a $M_1 - M_2 \in F$ car

F est un sev.

Donc F est un anneau.

- Soient $M_1, M_2 \in F$. $M_1 M_2 = M_2 M_1$?

On a $M_1 M_2 = \begin{pmatrix} \underbrace{a_1 a_2}_{a} & \overbrace{a_1 b_2 + a_2 b_1}^{2} & a_1 c_2 + b_1 b_2 + c_1 a_2 \\ 0 & \underbrace{a_1 a_2}_{a} & \underbrace{a_1 b_2 + a_2 b_1}_{b} \\ 0 & 0 & \underbrace{a_1 a_2}_{a} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_2 a_1 & a_2 b_1 + a_1 b_2 & a_2 c_1 + b_2 b_1 + c_2 a_1 \\ 0 & a_2 a_1 & a_2 b_1 + a_1 b_2 \\ 0 & 0 & a_2 a_1 \end{pmatrix}$$

$= M_2 M_1$.

Donc F est commutatif.

4. • Soit $M_1 \in F$. Supposons M_1 est inversible dans F.

Alors il existe $M_2 \in F$ telle que $M_1 M_2 = I_3$.

Donc
$$\begin{pmatrix} \underbrace{a_1 a_2}_{a} & \underbrace{a_1 b_2 + a_2 b_1} & \underbrace{a_1 c_2 + b_1 b_2 + c_1 a_2} \\ 0 & \underbrace{a_1 a_2}_{a} & \underbrace{a_1 b_2 + a_2 b_1}_{b} \\ 0 & 0 & \underbrace{a_1 a_2}_{a} \end{pmatrix} = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{cases} a_1 a_2 = 1 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0 \\ a_1 c_2 + b_1 b_2 + c_1 a_2 = 0 \end{cases}$, donc nécessairement $a_1 \neq 0$.

Si $a_1 \neq 0$, on obtient
$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{a_1} \\ b_2 = \dfrac{-a_2 b_1}{a_1} = -\dfrac{b_1}{a_1^2} \\ c_2 = \dfrac{-b_1 b_2 - c_1 a_2}{a_1} \end{cases}$$
$$= \frac{b_1}{a_1^3} - \frac{c_1}{a_1^2}.$$

Donc $M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & -\frac{b_1}{a_1^2} & \frac{b_1}{a_1^3} - \frac{c_1}{a_1^2} \\ 0 & \frac{1}{a_1} & -\frac{b_1}{a_1^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_1} \end{pmatrix} \in F$.

• Réciproquement, si $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \in F$ avec $a \neq 0$. $=$

Alors M est inversible, d'inverse $M' \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & -\frac{b_1}{a_1^2} & \frac{b_1}{a_1^3} - \frac{c_1}{a_1^2} \\ 0 & \frac{1}{a_1} & -\frac{b_1}{a_1^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_1} \end{pmatrix}$

puisque $M \times M' = I_3$.

• Donc les éléments inversibles de F sont les matrices

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$.

Exercice 5

1. Supposons qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

On sait que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

et $\mathrm{Tr}(M+N) = \mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(N)$.

On a donc $\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(I_n) = \mathrm{Tr}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{n}\right) = n$.

Or $\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0$.

Donc ceci est absurde.

Réponse 1 : Non.

2. On a $A = AB - BA$, et $A^p = A^{p-1} \times A = A^{p-1}(AB - BA)$

$= A^p B - A^{p-1} BA$.

(Donc $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0$.)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$\mathrm{Tr}(A^p) = \mathrm{Tr}(A^p B - A^{p-1} BA)$

$= \mathrm{Tr}(A^p B) - \mathrm{Tr}(A^{p-1} BA)$

On a $\mathrm{Tr}(A^{p-1} BA) = \mathrm{Tr}(\underbrace{(A^{p-1} B)}_{M} \underbrace{A}_{N}) = \mathrm{Tr}(A \times (A^{p-1} B))$

$= \mathrm{Tr}(A^p B)$.

Donc $\mathrm{Tr}(A^p) = \mathrm{Tr}(A^p B) - \mathrm{Tr}(A^p B) = 0$.

Exercice 2

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ \downarrow i \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Si $i \neq j$, $I_n + E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & (0) \\ & \ddots & & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$

Si $i = j$, $I_n + E_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ (0) & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$,

On a $(I_n + E_{ii})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ (0) & 1/2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

Rappel

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & d_2 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

$$D' = \begin{pmatrix} d_1' & & (0) \\ (0) & & d_n' \end{pmatrix}$$

$$DD' = \begin{pmatrix} d_1 d_1' & & (0) \\ & d_2 d_2' & \\ (0) & & \ddots \\ & & & d_n d_n' \end{pmatrix}$$

$$E_{ij} E_{k\ell} = \begin{cases} 0_n & \text{si } j \neq k \\ E_{i\ell} & \text{si } j = k \end{cases} = \delta_{jk} E_{i\ell} \qquad \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}.$$

$$A = \sum_{\substack{i = 1..n \\ j = 1..n}} a_{ij} E_{ij}$$

$$A E_{k\ell} = \sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} a_{ij} E_{ij} E_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} E_{i\ell} = \begin{array}{c} \xrightarrow{\ell} \\ \begin{pmatrix} 0 & a_{1k} & 0 \\ \vdots & a_{2k} & \vdots \\ 0 & a_{nk} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(De même pour le calcul de $E_{k\ell} A$)

$$= (0 | \cdots | 0 | \underset{\xrightarrow{\ell}}{C_k} | 0 | \cdots 0).$$

$$A(I_n + E_{ij}) = A + AE_{ij}$$

$$= (C_1 | \cdots | C_n) + (0 | \cdots | 0 | \underset{\xrightarrow{j}}{C_i} | 0 \cdots 0)$$

$$= (C_1 | \cdots | C_{j-1} | C_j + C_i | C_{j+1} | \cdots C_n).$$

C'est la matrice A à laquelle on ajoute la $i^{\text{ème}}$ colonne à la jème.

On cherche A telle que $A(I_n+E_{ij}) = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$= (C_1 | \dots | C_{j-1} | C_j + C_i | C_{j+1} | \dots C_n)$

$C_j + C_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \downarrow j$

$C_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\downarrow j$ $\downarrow i$

Donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & -1 & & 0 & \\ & & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= I_n - E_{ij}$

Donc $(I_n + E_{ij})^{-1} = I_n - E_{ij}$ pour $i \neq j$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec toutes les matrices.

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AM = MA$.

En particulier, pour tout $(i,j) \in \{1..n\}^2$, $AE_{ij} = E_{ij}A$.

On a $AE_{ij} = (\underrightarrow{0 | \dots | 0} | C_i | 0 \dots 0)$

$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & a_{2i} & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{ni} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (colonne j)

$^t{}^t(A) = A$

$^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

$E_{ij} = i\downarrow \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ (colonne j)

$E_{ij}A = {}^t({}^t(E_{ij}A)) = {}^t({}^tA\,{}^tE_{ij})$

$= {}^t({}^tA\,E_{ji})$

$= {}^t((\underrightarrow{0 | \dots 0} | {}^tL_j | 0 \dots 0))$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \downarrow i$

${}^tE_{ij} = j\downarrow \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ (colonne i)

$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$

${}^tA = ({}^tL_1 | \dots | {}^tL_n)$

Donc $E_{ij}A = i\downarrow \begin{pmatrix} 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \\ a_{j1} & \dots & & a_{jn} \\ 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{array}{cc} i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} & a_{jn} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ & j \end{array} = \begin{array}{cc} i & \begin{pmatrix} 0 & a_{1i} & 0 \\ \vdots & a_{ii} & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{ni} & 0 \end{pmatrix} \\ & j \end{array}$.

On a $a_{jj} = a_{ii}$ et pour $i \neq j$, $a_{ij} = 0$.

Donc $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{11} & \\ 0 & & \ddots \; a_{11} \end{pmatrix} = a_{11} I_n$.

Réciproquement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λI_n commute avec toute matrice M : $(\lambda I_n) M = \lambda M = M \times (\lambda I_n)$.

Les matrices qui commutent avec toutes les autres sont les λI_n avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que A commute avec toutes les matrices inversibles.

D'après q.1, A commute avec $I_n + E_{ij}$.

Donc $A(I_n + E_{ij}) = (I_n + E_{ij}) A$,

donc $\cancel{A} + A E_{ij} = \cancel{A} + E_{ij} A$

donc $A E_{ij} = E_{ij} A$.

D'après la q2, on a donc $A = a_{11} I_n$.

Réciproquement, λI_n commute avec toutes les matrices inversibles.

Donc l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices inversibles est $\{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}$.