Feuille de TD n° 6

Dimension finie et sommes de sous-espaces vectoriels

13 avril 2021

Exercice 1.

1. Montrer que la famille $((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer les coordonnées du vecteur $(8,4,2)$ dans cette base.
2. Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis déterminer les coordonnées de $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ dans cette base.
3. Montrer que la famille (X^2+1, X^2+X) est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Dans cet exercice, on connait la dimension de l'espace vectoriel E, c'est donc plus facile de montrer que des familles sont des bases.

1. (Plusieurs méthodes possibles) Montrons que cette famille est libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que
$$\lambda_1(-1,1,1)+\lambda_2(1,-1,1)+\lambda_3(1,1,,-1)=(0,0,0).$$
Par résolution du système associé (non détaillé ici), on trouve $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.
Donc la famille est libre. Cette famille est constituée de trois éléments dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, c'est donc une base.
On cherche $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que
$$(8,4,2)=a(-1,1,1)+b(1,-1,1)+c(1,1,-1).$$
(*on sait qu'ils existent car la famille étant une base, elle est génératrice*)
On résout donc le système $\begin{cases}8=-a+b+c\\ 4=a-b+c\\ 2=a+b-c\end{cases}$. On trouve $\begin{cases}2a=6 & \textit{(L2+L3)}\\ 2b=10 & \textit{(L1+L3)}\\ 2c=12 & \textit{(L1+L2)}\end{cases}$.
Donc $(a,b,c)=(3,5,6)$.
Les coordonnées de $(8,4,2)$ dans cette base sont donc $(3,5,6)$.
On pouvait aussi montrer que la famille était génératrice (résolution d'un système), constituée de 3 vecteurs, c'est une base et on obtient alors directement les coordonnées de $(8,4,2)$. Voir un exemple dans la question suivante.
2. (Plusieurs méthodes possibles). *On peut utiliser la même méthode que dans la question 1 ou la méthode suivante qui n'est pas la plus astucieuse (longue et calculatoire).* Montrons que cette famille est génératrice.
Soit $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On cherche $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$ tel que
$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$
soit tel que
$$\begin{cases}a=\lambda_1+2\lambda_2\\ b=\lambda_3+2\lambda_4\\ c=\lambda_2+2\lambda_3\\ d=2\lambda_1+\lambda_4\end{cases}.$$
On obtient alors
$$\begin{cases}\lambda_1=a-2\lambda_2\\ \lambda_4=d-2a+4\lambda_2\\ \lambda_3=b-2d+4a-8\lambda_2\\ \lambda_2=c-2b+4d-8a+16\lambda_2\end{cases}\quad,\quad \textit{soit}\quad \begin{cases}\lambda_2=\dfrac{-c+2b-4d+8a}{15}\\ \lambda_1=a-2-2\dfrac{-c+2b-4d+8a}{15}\\ \lambda_4=d-2a+4\dfrac{-c+2b-4d+8a}{15}\\ \lambda_3=b-2d+4a-8\dfrac{-c+2b-4d+8a}{15}\end{cases}.$$

Pour ces valeurs de λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4, on a donc écrit M comme combinaisons linéaires des éléments de la famille étudiée. On en déduit que la famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice. Composée de quatre éléments dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 4, cette famille est une base. *Remarquons que la solution du système est unique, ce qui nous permet également de conclure que la famille est une base.*

Les coefficients $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ obtenus précédemment sont les coordonnées de la matrice $M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ dans la base étudiée. En prenant $a = b = c = d = 1$, on obtient $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_3 = \frac{1}{3}$ et $\lambda_4 = \frac{1}{3}$.

Les coordonnées de $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ dans la base sont donc $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Ici, il serait beaucoup plus rapide de montrer que la famille est libre (facile), constituée de 4 éléments, c'est une base. Pour trouver les coordonnées, on voit qu'en faisant la somme des quatre matrices, on obtient la matrice $\begin{pmatrix}3 & 3\\3 & 3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$.

Donc $3\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$, *donc finalement,*

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$$

et on retrouve les coordonnées. Et si on ne le voit pas, on peut résoudre un système pour retrouver ce résultat.

3. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1(X^2+1) + \lambda_2(X^2+X) = 0$. Alors $\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 = 0\\ \lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = 0\end{cases}$.

   Donc la famille est libre.
   Complétons-la en une base. La famille $(1, X, X^2, X^3)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$. On sait donc que l'on peut compléter la famille (X^2+1, X^2+X) en une base avec les éléments de cette famille génératrice.
   Comme $1 \notin \mathrm{Vect}(X^2+1, X^2+X)$, la famille $(X^2+1, X^2+X, 1)$ est une famille libre.
   Comme $X^3 \notin \mathrm{Vect}(X^2+1, X^2+X, 1)$, la famille $(X^2+1, X^2+X, 1, X^3)$ est une famille libre. Cette famille est constituée de quatre vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ de dimension 4, c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2. Justifier que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels puis déterminer leur dimension :

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$,
2. $G = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 0\}$
3. $H = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n\}$,
4. $I = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$.

Pour montrer que les espaces sont des sous-espaces vectoriels, on peut montrer que la caractérisation du cours est vérifiée, ou bien écrire les espaces comme des "Vect". Ici, cette dernière méthode est plus efficace car elle nous fournit en plus une famille génératrice.

1. On a $F = \{(2y - 3z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((2, 1, 0), (-3, 0, 1))$.
   Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   La famille $((2, 1, 0), (-3, 0, 1))$ est donc une famille génératrice de F. Cette famille est libre (les deux vecteurs ne sont pas colinéaires), donc c'est une base de F.
   F est donc de dimension 2.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   $f \in G$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 0$, soit si et seulement s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.
   Posons $f_1 : x \longmapsto 1$.
   Alors $G = \{a\mathrm{id} + bf_1 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, f_1)$.
   G est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   La famille (id, f_1) est donc une famille génératrice de F. Cette famille est libre (les deux vecteurs ne sont pas colinéaires ou le vérifier avec une combinaison linéaire nulle), donc c'est une base de G.
   G est donc de dimension 2.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n$.
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$ si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a, b, a, b, a, b, a, b, \ldots) = a(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots) + b(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   Posons $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$.
   Alors $H = \mathrm{Vect}((v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
   Donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   La famille $((v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est donc une famille génératrice de H. Cette famille est libre (ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires ou le vérifier avec une combinaison linéaire nulle), donc c'est une base de H.
   Donc H est de dimension 2.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$A \in I$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, soit si et seulement si $a + d = 0$, soit encore si et seulement si $d = -a$.

Donc $I = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Donc I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est donc une famille génératrice de I. On vérifie facilement (à faire, prendre une combinaison linéaire nulle) que cette famille est libre. C'est donc une base de I.

Donc I est de dimension 3.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $\vec{u} = (1,0,1,0)$, $\vec{v} = (0,1,-1,0)$, $\vec{w} = (1,1,1,1)$, $\vec{x} = (0,0,1,0)$ et $\vec{y} = (1,1,0,-1)$. Soit $F = \mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ et $G = \mathrm{Vect}(\vec{x},\vec{y})$.

Déterminer les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$.

- La famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une famille génératrice de F.
  Déterminons si elle est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} = \vec{0}$. Cette équation est équivalente au système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

  La famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est donc libre. Libre et génératrice, c'est donc une base de F et $\dim(F) = 3$.
- G est engendré par les deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ qui sont non colinéaires. La famille $(\vec{x},\vec{y})$ est donc une base de G et $\dim(G) = 2$.
- On a $F + G = \mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + \mathrm{Vect}(\vec{x},\vec{y}) = \mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{x},\vec{y})$.
  La famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{x},\vec{y})$ est donc une famille génératrice de $F+G$.
  Il s'agit d'une famille de 5 vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ de dimension 4 : la famille est donc nécessairement liée. Nous allons extraire une base de cette famille génératrice.
  On constate par exemple que $2\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{y} + \vec{x} = \vec{w}$ (on peut résoudre un système si besoin pour trouver une telle relation).
  On a donc $F + G = \mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{x},\vec{y}) = \mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v},\vec{x},\vec{y})$.
  La famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{x},\vec{y})$ est donc toujours génératrice de $F+G$.
  Regardons si la famille est libre : soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{x} + \lambda_4\vec{y} = \vec{0}$. Alors :

$$\begin{array}{cl} & \left\{\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & & & & & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & + & \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & 0 \\ & & & & & - & \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{ccccccccc} \lambda_3 & + & \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \lambda_1 & & & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & & & \lambda_2 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & & & & - & \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \end{array}$$

  La famille est donc libre. Libre et génératrice, c'est donc une base de $F+G$ et $\dim(F+G) = 4$.
- D'après la formule de Grassmann, $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) = 1$.
  Pour obtenir une base, il suffit de prendre un vecteur non nul appartenant à F et à G. On prend alors par exemple $2(\vec{u}+\vec{v}) - \vec{w} = \vec{y} - \vec{x}$.

Exercice 4.

1. Montrer que $F_1 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et
   $G_1 = \{x \longmapsto ax + b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Montrer que $F_2 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 0\}$ et
   $G_2 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_{2n+1}\}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On montre par exemple que les ensembles sont des sous-espaces vectoriels en vérifiant les trois points de la caractérisation (non fait ici, voir les TDs précédents).

1. • Montrons que $F_1 \cap G_1 = \{0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\}$.
   Soit $f \in F_1 \cap G_1$. Alors, comme $f \in G_1$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.
   Comme $f \in F_1$, $f(0) = b = 0$ et $f'(0) = a = 0$.
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ et $f = 0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ (f est l'application nulle).
   Donc $F_1 \cap G_1 \subset \{0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\}$ et l'autre inclusion est évidente car $F_1 \cap G_1$ est un sous-espace vectoriel donc contient le vecteur nul.
   Donc $F_1 \cap G_1 = \{0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\}$.
   • Montrons que $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F_1 + G_1$. (*un argument de dimension n'est pas possible ici car* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *est de dimension infinie*)
   On a $F_1 + G_1 \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel.
   Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   Analyse : On cherche $g \in F_1$ et $h \in G_1$ telles que $f = g + h$.
   Comme $g \in F_1$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$.
   On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b + h(x)$ et $f'(x) = a + h'(x)$.
   Comme $h \in G_1$, $h(0) = 0$, donc $f(0) = b$, et $h'(0) = 0$, donc $f'(0) = a$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f'(0)x + f(0) + h(x)$, donc $h(x) = f(x) - f'(0)x + f(0)$.
   Synthèse : On a donc $f(x) = f'(0)x + f(0) + (f(x) - f'(0)x - f(0))$ et $x \longmapsto f'(0)x + f(0) \in F_1$ et $x \longmapsto f(x) - f'(0)x - f(0) \in G_1$ car elle vaut 0 en 0 et sa dérivée est nulle en 0.
   Donc $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset F_1 + G_1$.
   Finalement $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F_1 + G_1$.
   • De ces deux points, on en déduit que $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F_1 \oplus G_1$.
2. • Montrons que $F_2 \cap G_2 = \{(0)_{n\in\mathbb{N}}\}$.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F_2 \cap G_2$.
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 0 = u_{2n+1}$. Donc les termes pairs et les termes impairs sont tous nuls, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.
   Donc $F_2 \cap G_2 \subset \{(0)_{n\in\mathbb{N}}\}$.
   L'autre inclusion étant évidente, on a $F_2 \cap G_2 = \{(0)_{n\in\mathbb{N}}\}$.
   • Montrons que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = F_2 + G_2$. (*Un argument de dimension ne convient pas ici car* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *est de dimension infinie.*)
   On a $F_2 + G_2 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   On peut écrire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, u_1-u_0, 0, u_3-u_2, 0, u_5-u_4, 0, u_6-u_5, \dots) + (u_0, u_0, u_2, u_2, u_4, u_4, u_6, u_6, \dots) \in F_2 + G_2$.
   Donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \subset F_2 + G_2$.
   Finalement $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = F_2 + G_2$.
   • Donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = F_2 \oplus G_2$.
3. • Montrons que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0_n\}$ où 0_n désigne la matrice nulle.
   Soit $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. La matrice étant antisymétrique, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $m_{i,i} = 0$ et pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ distincts, $m_{i,j} = -m_{j,i}$. La matrice étant symétrique, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ distincts, $m_{i,j} = m_{j,i}$. Donc finalement, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $m_{i,j} = 0$.
   Donc $M = 0_n$.
   Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \{0_n\}$.
   L'autre inclusion est évidente, donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0_n\}$.
   • On a $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrons l'inclusion réciproque. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On a $M = \dfrac{M + {}^tM}{2} + \dfrac{M - {}^tM}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   Donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   Finalement, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   • D'où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.

Montrer que si $\dim(F) + \dim(G) > n$ alors $F \cap G$ contient un vecteur non nul.

D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Donc $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G)$.

Or $F + G \subset E$, donc $\dim(F+G) \leq \dim(E) = n$ et par hypothèse, $\dim(F) + \dim(G) > n$.

Donc $\dim(F \cap G) > 0$. Donc $F \cap G \neq \{\vec{0}_E\}$.

$F \cap G$ contient donc un vecteur non nul.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Soient $F = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ et G un supplémentaire de F dans E. Pour tout $a \in G$, on pose

$$F_a = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1 + \vec{a}, \ldots, \vec{e}_p + \vec{a}).$$

1. Soit $\vec{a} \in G$. Montrer que $F_a \oplus G = E$.
2. Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ des éléments de G. Montrer que $F_a = F_b$ si et seulement si $a = b$.

---

1. • Montrons que $F_a \cap G = \{\vec{0}_E\}$.
   Soit $\vec{x} \in F_a \cap G$. Il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que
   $$\vec{x} = \lambda_1(\vec{e}_1 + \vec{a}) + \ldots + \lambda_p(\vec{e}_p + \vec{a}) = \lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_p\vec{e}_p + (\lambda_1 + \ldots + \lambda_p)\vec{a}$$
   On a donc $\lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_p\vec{e}_p = \vec{x} - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_p)\vec{a}$.
   Comme $\vec{x}$ et $\vec{a}$ sont éléments de G et G étant un espace-vectoriel, $\vec{x} - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_p)\vec{a} \in G$.
   Donc $\lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_p\vec{e}_p \in F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ car F et G sont supplémentaires dans E.
   Donc $\lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_p\vec{e}_p = \vec{0}_E$.
   Donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = (0, \ldots, 0)$ car la famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ est libre.
   D'où $\vec{x} = \vec{0}_E$.
   Donc $F_a \cap G \subset \{\vec{0}_E\}$ et l'autre inclusion est évidente.
   Donc $F_a \cap G = \{\vec{0}_E\}$.
   • Montrons que $E = F_a + G$.
   On a évidemment $F_a + G \subset E$.
   Soit $\vec{x} \in E$. Comme $E = F \oplus G$, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ et $\vec{y} \in G$ tels que
   $$\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_p\vec{e}_p + \vec{y}.$$
   On peut alors écrire
   $$\vec{x} = \lambda_1(\vec{e}_1 + \vec{a}) + \ldots + \lambda_p(\vec{e}_p + \vec{a}) + \vec{y} - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_p)\vec{a}.$$
   On a $\lambda_1(\vec{e}_1 + \vec{a}) + \ldots + \lambda_p(\vec{e}_p + \vec{a}) \in F_a$ et $\vec{y} - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_p)\vec{a} \in G$ car $\vec{y}$ et $\vec{a}$ sont éléments de G et G est un espace vectoriel.
   Donc $\vec{x} \in F_a + G$, puis $E \subset F_a + G$.
   Finalement, $E = F_a + G$.
   • De ces deux points, on en déduit que $E = F_a \oplus G$.
2. Si $a = b$ alors $F_a = F_b$.
   Réciproquement, supposons que $F_a = F_b$. Comme $\vec{e}_1 + \vec{a} \in F_a = F_b$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$ tels que
   $$\vec{e}_1 + \vec{a} = \lambda_1(\vec{e}_1 + \vec{b}) + \ldots + \lambda_p(\vec{e}_p + \vec{b})$$
   On a alors
   $$\vec{a} - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_p)\vec{b} = (\lambda_1 - 1)\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_p + \ldots + \lambda_p\vec{e}_p \in F \cap G = \{\vec{0}_E\}.$$
   Donc $(\lambda_1 - 1)\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_p + \ldots + \lambda_p\vec{e}_p = \vec{0}_E$.
   La famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ étant libre, $\lambda_1 - 1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, …, $\lambda_p = 0$.
   On a donc $\vec{e}_1 + \vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{b}$, soit $\vec{a} = \vec{b}$.
   Donc $F_a = F_b$ si et seulement si $\vec{a} = \vec{b}$.