Feuille de TD n° 7

Correction

19 avril 2021

Exercice 1.

1. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \text{ et } x + y - 2z = 0\}$.
   Soient $\vec{u} = (1, 0, 0, 0)$ et $\vec{v} = (1, 1, 0, 0)$. Posons $G = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.
   Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Dans $\mathbb{K}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels
   $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G_\lambda = \mathrm{Vect}(\lambda, 1, 2)$
   (a) Déterminer la dimension de H et en déterminer une base.
   (b) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{K}$, G_λ est un supplémentaire de H dans $\mathbb{K}^3$.

---

1. • Vérifions que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
   Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors $(x, y, z, t) \in F$ si et seulement si $x - y = 0$ et $x + y - 2z = 0$, soit si et seulement si $x = y$ et $z = x$, soit finalement si et seulement si $(x, y, z, t) = (x, x, x, t) = x(1, 1, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1)$.
   Donc $F = \mathrm{Vect}((1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ et F est un sous-espace vectoriel comme espace vectoriel engendré. (*On pourrait aussi vérifier la caractérisation*).
   G est un sous-espace vectoriel comme espace vectoriel engendré.
   • Montrons que $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$.
   Soit $(x, y, z, t) \in F \cap G$.
   Comme $(x, y, z, t) \in G$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y, z, t) = \lambda(1, 0, 0, 0) + \mu(1, 1, 0, 0) = (\lambda + \mu, \mu, 0, 0)$.
   Comme $(x, y, z, t) \in F$, $\lambda + \mu - \mu = 0$ et $\lambda + \mu = 0$.
   Donc $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. Donc $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$.
   Donc $F \cap G \subset \{(0, 0, 0, 0)\}$ et l'inclusion réciproque est évidente.
   Donc $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$.
   • F est de dimension 2 puisque la famille $((1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ est génératrice et les vecteurs étant non colinéaires, elle est également libre, c'est donc une base.
   De même, G est de dimension 2 car la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base (génératrice et libre).
   On a donc $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = \dim(F) + \dim(G)$.
   • Conclusion : F et G sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
2. (a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $(x, y, z) \in H$ si et seulement si $x = -y - z$, soit si et seulement si
   $$(x, y, z) = (-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$
   .
   Donc $H = \mathrm{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$. La famille $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est donc génératrice.
   Or les deux vecteurs $(-1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires, la famille $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est donc libre.
   La famille $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est donc une base de H et $\dim(H) = 2$.
   (b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\dim(G_\lambda) = 1$ (puisque la famille $((\lambda, 1, 2))$ est libre (un seul vecteur non nul) et génératrice).
   Donc $\dim(\mathbb{K}^3) = 3 = \dim(H) + \dim(G_\lambda)$.
   Donc les sous-espaces vectoriels G_λ et H sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^3$ si, et seulement si, $G_\lambda \cap H = \{(0, 0, 0)\}$.
   Soit $(x, y, z) \in G_\lambda \cap H$. Comme $(x, y, z) \in G_\lambda$, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que
   $$(x, y, z) = \mu(\lambda, 1, 2)$$
   De plus
   $$0 = x + y + z = \mu(\lambda + 1 + 2) = \mu(\lambda + 3)$$
   Si $\lambda \neq -3$, alors $\mu = 0$ et $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Donc $G_\lambda \cap H = \{(0, 0, 0)\}$. Donc les sous-espaces vectoriel G_λ et H sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^3$.
   Si $\lambda = -3$, alors $(\lambda, 1, 2)$ appartient à H et à G_λ, donc $G_\lambda \cap H \neq \{(0, 0, 0)\}$. Donc les sous-espaces vectoriels G_λ et H ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{K}^3$.

Exercice 2.

1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y + 2z = 0\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer un supplémentaire de $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(X) = P(-X)\}$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Méthode : On trouve une base de F puis on la complète en une base de E. Les vecteurs ajoutés forment une famille génératrice d'un supplémentaire de F dans E.

1. • Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $(x, y, z) \in F$ si et seulement si $-2x + y + 2z = 0$, soit si et seulement si $y = 2x - 2z$, soit si et seulement si $(x, y, z) = (x, 2x - 2z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, -2, 1)$.
   Donc $F = \mathrm{Vect}((1, 2, 0), (0, -2, 1))$. La famille $((1, 2, 0), (0, -2, 1))$ est donc génératrice, elle est libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, c'est donc une base de F.
   • Le vecteur $(1, 0, 0) \notin \mathrm{Vect}((1, 2, 0), (0, -2, 1))$ puisque $(1, 0, 0) \notin F$.
   La famille $((1, 2, 0), (0, -2, 1), (1, 0, 0))$ est donc libre, composée de trois éléments dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
   Ainsi, $G = \mathrm{Vect}((1, 0, 0))$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.
2. • Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 \in \mathbb{R}_4[X]$.
   Alors $P \in F$ si et seulement si $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 = a_0 - a_1X + a_2X^2 - a_3X^3 + a_4X^4$, soit si et seulement si $a_1 = 0$ et $a_3 = 0$, soit finalement si et seulement si $P = a_0 + a_2X^2 + a_4X^4$.
   Donc $F = \mathrm{Vect}(1, X^2, X^4)$. La famille $(1, X^2, X^4)$ est donc une famille génératrice, elle est libre (sous-famille d'une famille libre ou de degrés échelonnés), c'est donc une base de F.
   • La famille $(1, X^2, X^4)$ se complète en la base $(1, X^2, X^4, X, X^3)$ de $\mathbb{R}_4[X]$ (c'est la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ à ordre près des termes).
   Ainsi, $G = \mathrm{Vect}(X, X^3)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 3.

1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces affines :
   (a) $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 2\}$,
   (b) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 2 \text{ et } f(1) = -3\}$.
2. (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n + 3$ est un sous-espace affine.
   On pourra chercher une suite particulière sous la forme $(an + b)_{n\in\mathbb{N}}$
   (b) Exprimer en fonction de n la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ telle que $u_0 = u_1 = 1$.

---

1. (a) Notons $\mathcal{F}_1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 2\}$.
   • La matrice M_0 avec tous les coefficients nuls sauf celui en position $(1, 1)$ qui vaut 2, appartient à $\mathcal{F}_1$.
   • Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $M \in \mathcal{F}_1$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(M) = 2 = \mathrm{Tr}(M_0)$,
   soit si et seulement si $\mathrm{Tr}(M) - \mathrm{Tr}(M_0) = 0$,
   soit si seulement si $\mathrm{Tr}(M - M_0) = 0$,
   soit finalement, si et seulement si $M - M_0 \in F_1$, où $F_1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid Tr(M) = 0\}$.
   Donc $\mathcal{F}_1 = M_0 + F_1$. De plus, on vérifie que F_1 est un espace vectoriel (par la caractérisation).
   • Conclusion : Donc $\mathcal{F}_1$ est un sous-espace affine passant par M_0 et dirigé par F_1.
   (b) Notons $\mathcal{F}_2 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 2 \text{ et } f(1) = -3\}$.
   • La fonction $f_0 : x \longmapsto 2 - 5x$ est continue et vérifie $f_0(0) = 2$ et $f_0(1) = -3$. Donc $f_0 \in \mathcal{F}_2$.
   • Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors $f \in \mathcal{F}_2$ si et seulement si $f(0) = 2 = f_0(0)$ et $f(1) = -3 = f_0(1)$,
   soit si et seulement si $f(0) - f_0(0) = 0$ et $f(1) - f_0(1) = 0$,
   soit si seulement si $(f - f_0)(0) = 0$ et $(f - f_0)(1) = 0$,
   soit finalement, si et seulement si $f - f_0 \in F_2$, où $F_2 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0\}$.
   Donc $\mathcal{F}_2 = f_0 + F_2$. De plus, on vérifie que F_2 est un espace vectoriel (par la caractérisation).
   • Donc $\mathcal{F}_2$ est un sous-espace affine passant par f_0 et dirigé par F_2.
2. (a) • Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$a(n + 2) + b = -a(n + 1) - b + 2an + 2b + 3,$$
   soit si et seulement si $a = 1$.
   Prenons $b = 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient donc à $\mathcal{E}$.
   • Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n + 3 = -u_{n+1} + 2u_n + v_{n+2} + v_{n+1} - 2v_n$,
   soit si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - v_{n+2} = -(u_{n+1} - v_{n+1}) + 2(u_n - v_n)$,
   soit finalement si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} - (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ où E est l'ensemble des suites telles que $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$.
   Donc $\mathcal{E} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + E$.
   D'après le cours d'analyse, l'équation caractéristique étant $X^2 + X - 2 = (X - 1)(X + 2) = 0$, on a $E = \{\lambda(1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1)_{n\in\mathbb{N}}, ((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}})$. E est donc bien un espace vectoriel.
   • Conclusion : Donc $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine passant par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et dirigé par E.

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + E$ et $u_0 = u_1 = 1$. D'après la question précédente, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(1)_{n\in\mathbb{N}} + \mu((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + \lambda + \mu(-2)^n$.
Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient donc $1 = \lambda + \mu$ et $1 = 1 + \lambda - 2\mu$. D'où $\lambda = \dfrac{2}{3}$ et $\mu = \dfrac{1}{3}$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}(-2)^n$.

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes ,où on note X la matrice inconnue :

1. $AX = B,\ A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. $AX = A + 2X,\ A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

---

1. $\det(A) = 3 \times 2 - 5 \times 1 = 1 \neq 0$, donc A est inversible et on a $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et donc $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 9 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.
2. $AX = A + 2X \Leftrightarrow (A - 2I_3)X = A$. Il faut d'abord vérifier si $C = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible :

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ x_1 - x_2 = y_2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 0 + 0 = y_1 - 4y_2 - 3y_3 \\ 0 + x_2 + 0 = y_1 - 5y_2 - 3y_3 \\ 0 + 0 + x_3 = -y_1 + 6y_2 + 4y_3 \end{cases}$$

Donc C est inversbile et
$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$
et donc $X = C^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

Exercice 5. Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} x + by + az = 1 \\ x + aby + z = b \\ ax + by + z = 1 \end{cases}$$

On applique la méthode du pivot en notant (S) le système initial :

$$(S) \iff \begin{cases} x + by + az = 1 & L_1 \\ b(a-1)y + (1-a)z = b-1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ b(1-a)y + (1-a^2)z = 1-a & L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + by + az = 1 \\ b(a-1)y + (1-a)z = b-1 \\ (2-a-a^2)z = b-a & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

Nous allons maintenant discuter de l'existence des solutions. Remarquons d'abord que $2 - a - a^2 = -(a-1)(a+2)$. Donc si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ alors $2 - a - a^2 \neq 0$ donc $z = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$. On a donc trouvé la valeur de z. La deuxième ligne du système triangulaire est $b(a-1)y + (1-a)z = b-1$. Or, on sait déjà $a - 1 \neq 0$. Si $b \neq 0$ alors, en reportant la valeur de z obtenue, on trouve la valeur $y = \frac{b-1-(1-a)z}{b(a-1)}$. Puis avec la première ligne on en déduit aussi $x = 1 - by - az$. Donc si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ et $b \neq 0$ alors il existe une unique solution (x, y, z). Il faut maintenant s'occuper des cas particuliers.

- Si $a = 1$ alors notre système triangulaire devient :

$$\begin{cases} x + by + z = 1 \\ 0 = b-1 \\ 0 = b-1 \end{cases}$$

Si $b \neq 1$ il n'y a pas de solution. Si $a = 1$ et $b = 1$ alors il ne reste plus que l'équation $x + y + z = 1$. On choisit par exemple y, z comme paramètres, l'ensemble des solutions est
$$\left\{(1 - y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Si $a = -2$ alors le système triangulaire devient :

$$\begin{cases} x & + & by & - & 2z & = & 1 \\ & & -3by & + & 3z & = & b-1 \\ & & & & 0 & = & b+2 \end{cases}$$

  Donc si $b \neq -2$ il n'y a pas de solution. Si $a = -2$ et $b = -2$ alors le système est

$$\begin{cases} x & - & 2y & - & 2z & = & 1 \\ & & 2y & + & z & = & -1 \end{cases}$$

  Si l'on choisit y comme paramètre alors il y a une infinité de solutions

$$\Big\{(-1-2y, y, -1-2y) \mid y \in \mathbb{R}\Big\}.$$

- Enfin si $b = 0$ alors la deuxième et troisième ligne du système triangulaire sont : $(1-a)z = -1$ et $(2-a-a^2)z = -a$. Donc $z = \frac{-1}{1-a} = \frac{-a}{2-a-a^2}$ (le sous-cas $b = 0$ et $a = 1$ n'a pas de solution). Dans tous les cas il n'y a pas de solution.

Conclusion :

- Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ et $b \neq 0$, le système admet une unique solution.
- Si $a = 1$ et $b \neq 1$ il n'y a pas de solution (le système n'est pas compatible).
- Si $a = 1$ et $b = 1$ il y a une infinité de solutions (qui forment un plan dans $\mathbb{R}^3$).
- Si $a = -2$ et $b \neq -2$ il n'y a pas de solution.
- Si $a = -2$ et $b = -2$ il y a une infinité de solutions (qui forment une droite dans $\mathbb{R}^3$).
- Si $b = 0$ il n'y a pas de solution.