TD 7.

Exercice 1

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$(x,y,z) \in H$

ssi $x+y+z=0$

ssi $z = -x-y$

ssi $(x,y,z) = (x, y, -x-y)$

$= x(1,0,-1)$

$+ y(0,1,-1)$.

Donc $H = \text{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$

Donc H est bien un sev de $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,0,-1),(0,1,-1))$ est génératrice et libre (2 vecteurs non colinéaires), c'est donc une base. Donc $\dim H = 2$.

b) $\dim \mathbb{K}^3 = 3$, $\dim H = 2$ et $\dim G_\lambda = 1$.

Donc $\dim \mathbb{K}^3 = \dim H + \dim G_\lambda$.

Or $\mathbb{K}^3 = H \oplus G_\lambda$ ssi $\dim \mathbb{K}^3 = \dim H + \dim(G_\lambda)$ ✓

et $H \cap G_\lambda \underset{\supset}{=} \{(0,0,0)\}$.

Soit $(x,y,z) \in H \cap G_\lambda$.

Comme $(x,y,z) \in H$, $x+y+z=0$

et $(x,y,z) \in G_\lambda$, $(x,y,z) = a(\lambda,1,2)$ avec $a \in \mathbb{K}$

$= (a\lambda, a, 2a)$.

Donc $a\lambda + a + 2a = 0$, soit $a(\lambda+3) = 0$.

Si $\lambda \neq -3$, donc $a = 0$, donc $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Donc $H \cap G_\lambda = \{(0,0,0)\}$.

Si $\lambda = -3$, alors $(-3,1,2) \in H \cap G_\lambda$.

$= 1 \times (-3,1,2)$

Donc $H \cap G_\lambda \neq \{(0,0,0)\}$. Donc G_λ et H ne sont pas supplémentaires.

Exercice 2

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$(x,y,z) \in F$ ssi $y = 2x - 2z$

ssi $(x,y,z) = (x, 2x-2z, z)$

Donc $F = \mathrm{Vect}((1,2,0),(0,-2,1))$.

La famille $((1,2,0),(0,-2,1))$ est une base de F (à justifier)

$\mathbb{R}^3$ est de dim 3 donc une base de $\mathbb{R}^3$ est composée de 3 vecteurs.

La famille $((1,2,0),(0,-2,1))$ est libre, on la complète en une base de $\mathbb{R}^3$

Par exemple, $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

On a $(1,0,0) \notin \mathrm{vect}((1,2,0),(0,-2,1)) = F$

(Sinon $(1,0,0) = \underbrace{\lambda}_{=0}(1,2,0) + \underbrace{\mu}_{=0}(0,-2,1)$ Absurde).

Donc $((1,2,0),(0,-2,1),(1,0,0))$ est libre, avec 3 éléments dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dim 3. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$,

Donc $G = \mathrm{Vect}((1,0,0))$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. On écrit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4$

$P \in F$ ssi $P(X) = P(-X)$

ssi $\cancel{a_0} + a_1 X + \cancel{a_2 X^2} + a_3 X^3 + \cancel{a_4 X^4} = \cancel{a_0} - a_1 X + \cancel{a_2 X^2} - a_3 X^3 + \cancel{a_4 X^4}$

ssi $a_1 = 0$ et $a_3 = 0$

ssi $P = a_0 1 + a_2 X^2 + a_4 X^4$.

Donc $F = \mathrm{Vect}(1, X^2, X^4)$

Donc $(1, X^2, X^4)$ est une base de F.

On complète $(1, X^2, X^4)$ en une base de $\underbrace{\mathbb{R}_4[X]}_{\text{de dim } 5}$.

Par exemple, $(1, X^2, X^4, X, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$

Donc $G = \text{Vect}(X, X^3)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 3.

1-a) • $M_0 = \begin{pmatrix} 2 & & (0) \\ & 0 & \\ (0) & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$ Alors $\text{Tr}\, M_0 = 2 + 0 + \dots + 0 = 2$.

Donc $M_0 \in \mathcal{F}$.

$\text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr} A + \mu \text{Tr} B$

• Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$M \in \mathcal{F}$ ssi $\text{Tr}(M) = 2 = \text{Tr}(M_0)$

ssi $\text{Tr}(M) - \text{Tr}(M_0) = 0$

ssi $\text{Tr}(M - M_0) = 0$.

ssi $M - M_0 \in F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(M) = 0\}$

ssi $M \in M_0 + F$.

On montre que F est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc $\mathcal{F} = M_0 + F$ est un sous-espace affine.

b) $\mathcal{F}_2 = f_0 + F_2$

où $F_2 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0\}$

Exercice 4

1. $AX = B$ ($ax = b$ dans $\mathbb{R}$; $x = \frac{1}{a} b$ si $a \neq 0$; a^{-1})

On a $\det A = 3 \times 2 - 1 \times 5$
$= 1 \neq 0$

et $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

• $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible

ssi $\det(A) = ad - cb \neq 0$

Alors $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Donc $X = A^{-1}B$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 & \cdot\cdot \\ - & - & - \end{pmatrix}.$$

2. $AX = A + 2X$ $\qquad$ ($ax = a + 2x$ dans $\mathbb{R}$

ssi $(A - 2I_3)X = A$ $\qquad$ $(a-2)x = a$

On a $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. $\qquad$ $x = \dfrac{a}{a-2}$ si $a - 2 \neq 0$

$\qquad = (a-2)^{-1} \times a$.)

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1 + L_3 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{c} L_1 + L_3 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2 + L_3 \\ L_1 + L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \\ L_2 + L_3 \\ L_1 + L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1 - 4L_2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3 - 6L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2 + L_3 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \times(-1) \\ L_3 \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}}_{(A - 2I_3)^{-1}}.$$

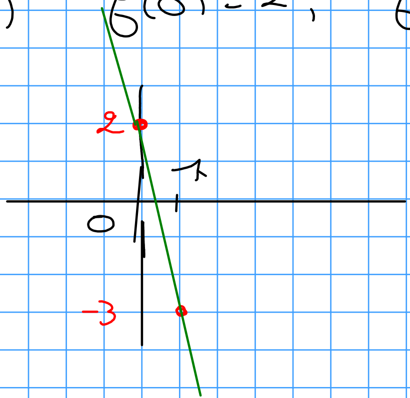
On a $(A - 2I_3)X = A$

donc $X = (A-2I_3)^{-1} A$.

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \dots$$

Ex 3.

1.b) $f(0) = 2$, $f(1) = -3$.



On cherche f sous la forme

$$f(x) = ax + \underbrace{b}_{=2}.$$

$$f(x) = -5x + 2.$$