TD 6 - Géométrie 2

Exercice 1.

2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc $\begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 & \lambda_3 + 2\lambda_4 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 & 2\lambda_1 + \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ \lambda_4 = 4\lambda_2 \\ \lambda_3 = -8\lambda_2 \\ -15\lambda_2 = 0 \end{cases}$

Donc $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_1 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$.

Donc la famille est libre.

Cette famille contient 4 éléments dans un ev de dimension 4, c'est donc une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Cette famille est génératrice donc il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+2b & b+2d \\ b+2c & 2a+d \end{pmatrix}$$

a, b, c et d sont les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base étudiée.

On remarque que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc les coordonnées sont $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1(X^2+1) + \lambda_2(X^2+X) = 0$,

soit $\underbrace{(\lambda_1+\lambda_2)}_{=0}X^2 + \underbrace{\lambda_2}_{=0}X + \underbrace{\lambda_1}_{=0} = 0$.

Donc la famille est libre.

On doit ajouter 2 vecteurs à la famille (X^2+1, X^2+X) pour obtenir une base car $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$.

On sait que la famille $(1, X, X^2, X^3)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3(X)$.

Rappel. Si $(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_p)$ est libre et si $\vec{e}_{p+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots e_p)$ alors $(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1})$ est libre.

$1 \notin \text{Vect}(X^2+1, X^2+X)$ (sinon $1 = \lambda_1(X^2+1) + \lambda_2(X^2+X)$
$= (\lambda_1+\lambda_2)X^2 + \lambda_2 X + \lambda_1$

Donc $(X^2+1, X^2+X, 1)$ est libre.

Donc $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1+\lambda_2=0$
Absurde)

$\left(X \in \text{Vect}(X^2+1, X^2+X, 1) \right.$
car $\left. X = X^2+X - (X^2+1) + 1 \right)$

$X^3 \notin \text{Vect}(X^2+1, X^2+X, 1)$. Donc $(X^2+1, X^2+X, 1, X^3)$ est libre, constituée de 4 vecteurs dans un ev de dim 4. C'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2

$x - 2y + 3z = 0$
$x = 2y - 3z$

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$(x,y,z) \in F$ ssi $(x,y,z) = (2y-3z, y, z)$
$= y(2,1,0) + z(-3,0,1)$

Donc $F = \text{Vect}((2,1,0), (-3,0,1))$

La famille $((2,1,0), (-3,0,1))$ est génératrice et libre (non colinéaires) donc c'est une base et $\dim F = 2$.

2. $f \in G$ ssi $f'' = 0$ ssi $\exists a, b\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = ax + b$
$= a f_1(x) + b f_2(x)$

$f_1 : x \longmapsto x$

$f_2 : x \longmapsto 1$.

On a $f = a f_1 + b f_2$. Donc $G = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

La famille (f_1, f_2) est libre :

$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$, $\forall x$ $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0$
soit $\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$

Pour $x = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0$.

$\dim G = 2$.

3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$ ssi $(u_0, u_1, u_0, u_1, u_0, u_1, u_0, \ldots)$
$= u_0 (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$
$+ u_1 (0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$

$\dim H = 2$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in I$ ssi $\mathrm{Tr}(A) = 0$
ssi $a + d = 0$
ssi $d = -a$
ssi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$
ssi $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $I = \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{famille génératrice}}\Big)$.

Montrer que c'est une famille libre. Donc c'est une base.

Donc $\dim I = 3$.

Exercice 3

- $\dim F = 3$. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est génératrice et on peut vérifier qu'elle est libre. Donc c'est une base.
- $\dim G = 2$
- $F + G = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}, \vec{y})$

Soit $\vec{a} \in F+G$. Alors $\vec{a} = \underset{\in F}{\vec{f}} + \underset{\in G}{\vec{g}} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w} + \mu_1 \vec{x} + \mu_2 \vec{y}$
$\in \text{vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}, \vec{y})$.

La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}, \vec{y})$ est génératrice avec 5 vecteurs, la famille est liée.

On résout par exemple $\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w} + \lambda_4 \vec{x} + \lambda_5 \vec{y} = \vec{0}$

On trouve $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_3 = \lambda_5 \\ \lambda_3 = -\lambda_4 \\ \lambda_1 = 2\lambda_4 \end{cases}$ Par exemple, $\lambda_4 = 1$,
$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_5 = -1$.

Donc $2\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w} + \vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$.

Donc $\vec{w} = 2\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{x} - \vec{y}$.

Donc $\text{vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}, \vec{y}) = \text{vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y})$

Donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y})$ est génératrice de $F+G$. On vérifie que la famille est libre. Donc c'est une base et $\dim F+G = 4$.

- Formule de Grassmann : $\dim F+G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$
donc $\dim F \cap G = 1$.

Exercice 4

1. F_1 est un sev :

① $F_1 \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ev

② $0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \in F_1$ $\quad f_0 = 0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}} : x \longmapsto 0$, donc $f_0(0) = 0$, $f_0'(x) = 0$

③ Soit $f, g \in F_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\qquad$ donc $f_0'(0) = 0$.

Posons $h = \lambda f + g$.

On a $h(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda 0 + 0 = 0$

et on a $h' = \lambda f' + g'$, donc $h'(0) = \lambda f'(0) + g'(0)$

$= \lambda \times 0 + 0 = 0$.

Donc $h \in F_1$.

Donc F_1 est un sev de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $\qquad (ax+b = af_1(x) + bf_2(x))$

$G_1 = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ où $f_1 : x \longmapsto x$ et $f_2 : x \longmapsto 1$.

- $F_1 \cap G_1 = \{0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\}$. $\qquad$ (on a $\{0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\} \subset F_1 \cap G_1$).

Soit $f \in F_1 \cap G_1$.

On a $f \in G_1$ donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f(x) = ax + b$.

Comme $f \in F_1$, $f(0) = 0$ et $f(0) = b$. Donc $b = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a$ et $f'(0) = 0$ et $f'(0) = a$

Donc $a = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Donc $f = 0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$.

Donc $F_1 \cap G_1 \subset \{0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\}$. D'où $F_1 \cap G_1 = \{0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\}$.

- $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F_1 + G_1$.

- On a $F_1 + G_1 \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

- Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On cherche $f \in F_1$ et $g \in G_1$ telles que $h = f + g$.

S'il existe $f \in F_1$ et $g \in G_2$ telles que $h = f + g$,

Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $h(x) = f(x) + ax + b$.

Donc $h(0) = b$.

On a aussi $h'(x) = f'(x) + a$, et $h'(0) = a$.

Donc $h(x) = f(x) + h'(0)x + h(0)$.

Donc $f(x) = h(x) - h'(0)x - h(0)$.

- Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \underbrace{h(x) - h'(0)x - h(0)}_{\substack{f(x) \\ \in F_1}} + \underbrace{h'(0)x + h(0)}_{\substack{g(x) \\ \in G_1}}$

On a $g \in G_1$.

De plus, $f(0) = h(0) - h(0) = 0$

et $f'(x) = h'(x) - h'(0)$, donc $f'(0) = h'(0) - h'(0) = 0$

Donc $f \in F_1$.

Donc $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset F_1 + G_1$. Donc $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F_1 + G_1$.

- Donc $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F_1 \oplus G_1$.

Ex 1

$(x,y,z) = a(-1,1,1) + b(1,-1,1) + c(1,1,-1)$

$$\begin{cases} x = -a+b+c \\ y = a-b+c \\ z = a+b-c \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 2a = y+z \\ 2b = x+z \\ 2c = x+y \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = \frac{y+z}{2} \\ b = \frac{x+z}{2} \\ c = \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

- On a déduit que les coord de $(8,4,2)$ sont $(3,5,6)$.

$(2,1,0)$ et $(-3,0,1)$ ne sont pas colinéaires

S'ils l'étaient, $(-3,0,1) = \lambda(2,1,0)$

$= (2\lambda, \lambda, 0)$ Absurde.

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 (v_n)_n + \lambda_2 (w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,0,\dots)$

$(\lambda_1 \times 1 + \lambda_2 \times 0,\ \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 1,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2)$

$= (0,0,\dots)$

Donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$.

Ex 4.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \underbrace{(v_n)_{n\in\mathbb{N}}}_{\in F_2} + \underbrace{(w_n)_{n\in\mathbb{N}}}_{\in G_2}$$

$(u_0, u_1, u_2, u_3, \dots) = (0, v_1, 0, v_3, 0, v_5, 0, \dots)$

$+ (w_0, w_0, w_2, w_2, w_4, w_4, \dots)$

$= (w_0, v_1 + w_0, w_2, v_3 + w_2, w_4, \dots)$

Donc $w_0 = u_0$

$v_1 = u_1 - u_0$

$w_2 = u_2$

$v_3 = u_3 - u_2, \dots$

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \underbrace{(0, u_1-u_0, 0, u_3-u_2, 0, \dots)}_{\in F_2} + \underbrace{(u_0, u_0, u_2, u_2, u_4, u_4, \dots)}_{\in G_2}$$

$$= (u_0, u_1, u_2, u_3, \dots)$$

4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Supposons qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que

$M = S + A$.

On a aussi ${}^tM = {}^tS + {}^tA$

$= S - A$.

Donc $\begin{cases} M = S + A \\ {}^tM = S - A \end{cases}$, donc $\begin{cases} 2S = M + {}^tM \\ 2A = M - {}^tM \end{cases}$, donc $\begin{cases} S = \dfrac{M + {}^tM}{2} \\ A = \dfrac{M - {}^tM}{2} \end{cases}$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a $M = \underbrace{\dfrac{M + {}^tM}{2}}_{S} + \underbrace{\dfrac{M - {}^tM}{2}}_{A}$.

On a ${}^tS = \dfrac{{}^tM + {}^t({}^tM)}{2} = \dfrac{{}^tM + M}{2} = S$, donc $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

et ${}^tA = \dfrac{{}^tM - {}^t({}^tM)}{2} = \dfrac{{}^tM - M}{2} = -A$, donc $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.