5 - Somme de sev

1 - Somme de 2 sev

Prop 88.

- $F+G\subset E$. Soit $\vec{u}\in F+G$, $\vec{u}=\underbrace{\vec{x}}_{\substack{\in F\\ \subset E}}+\underbrace{\vec{y}}_{\substack{\in G\\ \subset E}}\in E$.
- $\vec{0}_E=\underbrace{\vec{0}_E}_{\in F}+\underbrace{\vec{0}_E}_{\in G}\in F+G$.
- Soit $\vec{u}_1,\vec{u}_2\in F+G$, $\lambda\in\mathbb{K}$.

  $\lambda.\vec{u}_1+\vec{u}_2\overset{?}{\in}F+G$.

  $\vec{u}_1=\underbrace{\vec{x}_1}_{\in F}+\underbrace{\vec{y}_1}_{\in G}$, $\vec{u}_2=\underbrace{\vec{x}_2}_{\in F}+\underbrace{\vec{y}_2}_{\in G}$

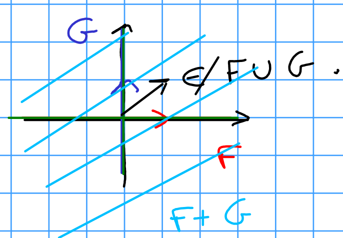
  $\lambda.\vec{u}_1+\vec{u}_2=\lambda.\vec{x}_1+\lambda.\vec{y}_1+\vec{x}_2+\vec{y}_2$

  $=\underbrace{(\lambda.\vec{x}_1+\vec{x}_2)}_{\in F}+\underbrace{(\lambda\vec{y}_1+y_2)}_{\in G}\in F+G$.

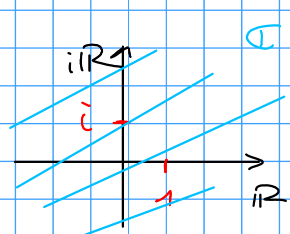
$F\subset F+G$. Soit $\vec{x}\in F$. On a $\vec{x}=\underbrace{\vec{x}}_{\in F}+\underbrace{\vec{0}_E}_{\in G}\in F+G$

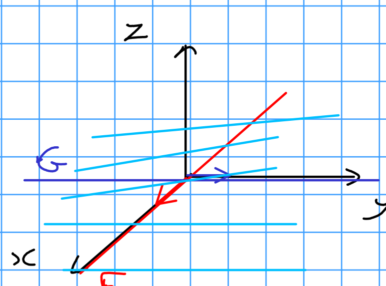
$G\subset F+G$

$F+G\subset H$: Soit $\vec{u}\in F+G$: $\vec{u}=\underbrace{\vec{x}}_{\substack{\in F\\ \subset H}}+\underbrace{\vec{y}}_{\substack{\in G\\ \subset H}}\in H$.



$\notin F\cup G$. $F\cup G$ pas un sev.





$\vec{x}+\vec{0}_E=\vec{x}$

$F+E\subset E$. $\vec{u}\in E$, $\vec{u}=\underbrace{\vec{0}_E}_{\in F}+\underbrace{\vec{u}}_{\in E}$

$F + F = F$.

$F + F \subset F$. $F \subset F + F$. $\underbrace{\vec{x}}_{\in F} = \underbrace{\vec{x}}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in F}$.

$F \cap G \subset F$, $\dim(F \cap G) \leq \dim F$

$F \cap G \subset G$, $\dim(F \cap G) \leq \dim G$.

Montrons que $(\vec{e_1}, \dots \vec{e_r}, \vec{x}_{r+1}, \dots \vec{x}_p, \vec{y}_{r+1}, \dots \vec{y}_q)$ est une base de $F + G$.

Soit $\vec{u} \in F + G$, $\vec{u} = \underbrace{\vec{x}}_{\in F} + \underbrace{\vec{y}}_{\in G}$

$\vec{x} = \sum \lambda_i \vec{e_i} + \sum \lambda_i \vec{x_i}$

$\vec{y} = \sum \mu_i \vec{e_i} + \sum \mu_i \vec{y_i}$.

$= \sum \underbrace{(\lambda_i + \mu_i)}_{\in K} \vec{e_i} + \sum \underbrace{\lambda_i}_{\in K} \vec{x_i} + \sum \underbrace{\mu_i}_{\in K} \vec{y_i}$

$(\vec{e_1}, \dots \vec{e_r})$ base de $F \cap G$.

$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{r} \rho_i \vec{e_i}$ et $\vec{\omega} = \mu_{r+1} \vec{y}_{r+1} + \dots + \mu_q \vec{y}_q$

Donc $\sum \rho_i \vec{e_i} = \sum \mu_j \vec{y_j}$

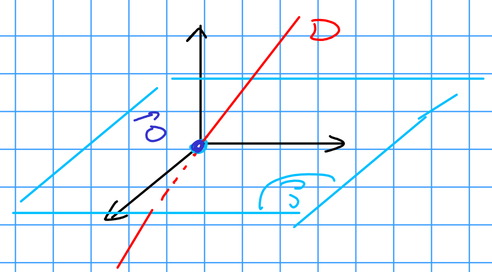
donc $\rho_1 \vec{e_1} + \dots + \rho_r \vec{e_r} - \mu_{r+1} \vec{y}_{r+1} \dots - \mu_q \vec{y}_q = \vec{0}$

Or $(\vec{e_1}, \dots \vec{e_r}, \vec{y}_{r+1}, \dots \vec{y}_q)$ est une famille libre (ca base de G). Donc $\rho_i = 0$, $\mu_i = 0$.

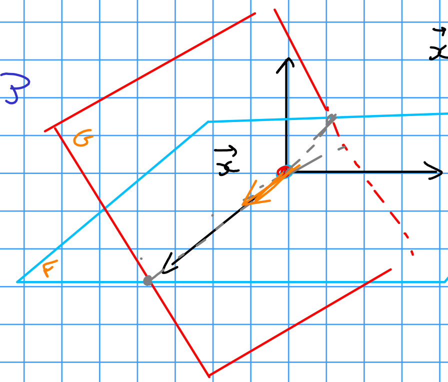
5. Somme de sev

2. Somme directe

$F+G=\{\vec{u}\in E,\ \vec{u}=\underbrace{\vec{x}}_{\in F}+\underbrace{\vec{y}}_{\in G}\}$ $\qquad F\oplus G$



$D\oplus\mathcal{P}$



$\vec{x}=\underbrace{\vec{x}}_{\in F}+\underbrace{\vec{0}_E}_{\in G}$ $\neq$

$=\underbrace{\vec{0}_E}_{\in F}+\underbrace{\vec{x}}_{\in G}$

Soit $\vec{u}\in F+G$. Supposons $\vec{u}=\underbrace{\vec{x}_1}_{\in F}+\underbrace{\vec{y}_1}_{\in G}$ et $\vec{u}=\underbrace{\vec{x}_2}_{\in F}+\underbrace{\vec{y}_2}_{\in G}$

Donc $\vec{x}_1+\vec{y}_1=\vec{x}_2+\vec{y}_2$, $\vec{w}=\underbrace{\vec{x}_1-\vec{x}_2}_{\in F}=\underbrace{\vec{y}_2-\vec{y}_1}_{\in G}\in F\cap G=\{\vec{0}_E\}$

Donc $\vec{w}=\vec{0}_E$, $\vec{x}_1=\vec{x}_2$ et $\vec{y}_2=\vec{y}_1$.

__Ex 95__. $F=\{(x,y,-x-y),(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

$=\{x(1,0,-1)+y(0,1,-1),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

$=\text{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$

$G=\text{Vect}((1,1,1))$. $\qquad F\cap G\subset\mathbb{R}^3$

Donc F et G sont des sev.

Montrons que $F\cap G=\{(0,0,0)\}$.

Soit $\vec{u}=(x,y,z)\in F\cap G$, On a $x+y+z=0$

$(x,y,z)\in G$: $(x,y,z)=a(1,1,1)$ avec $a\in\mathbb{R}$
$=(a,a,a)$.

Donc $a+a+a=0$, donc $a=0$. Donc

$(x,y,z)=(0,0,0)$. Donc $F\cap G\subset\{(0,0,0)\}$.

Evidemment $(0,0,0)\in F\cap G$. Donc $F\cap G=\{(0,0,0)\}$.

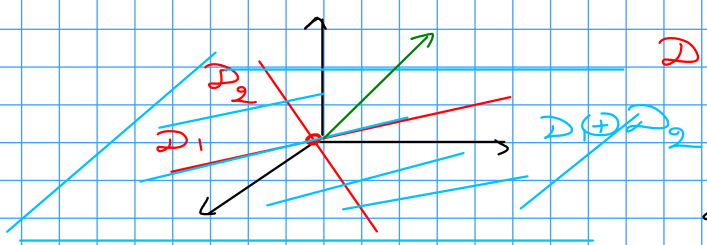
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \underbrace{\dim(\underbrace{F\cap G}_{=\{\vec{0}\}})}_{=0}$$

$$\dim(F\oplus G) = \dim F + \dim G .$$

GEOM 2 — **Chap 1 - Espaces vectoriels** — Cours 6 ③

5. Somme de sev

3. Sev supplémentaires

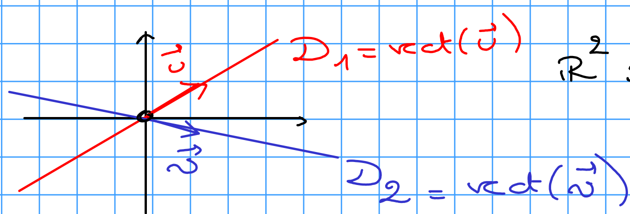


$D_1 \oplus D_2 \neq \mathbb{R}^3$ $\quad D_1 + D_2 \neq \mathbb{R}_3$

D_1 et D_2 sont en somme directe mais ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

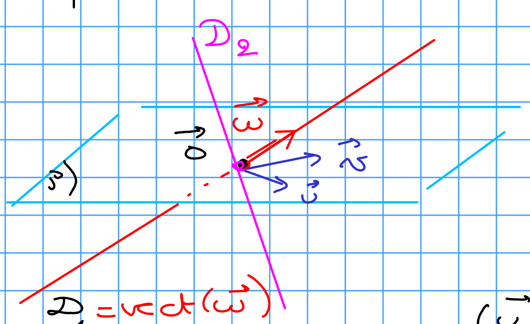
$P_1 + P_2 = \mathbb{R}^3$ mais la somme n'est pas directe : plusieurs décompositions possibles. $\quad P_1 \cancel{\oplus} P_2$

P_1 et P_2 ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.



$\mathbb{R}^2 = D_1 \oplus D_2$

$(\vec{u}, \vec{v})$ base de $\mathbb{R}^2$



$P \oplus D_1 = \mathbb{R}^3$. $\quad P \oplus D_2 = \mathbb{R}^3$

$P = \text{vect}(\vec{u}, \vec{v})$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ base de $\mathbb{R}^3$.

D_1 et D_2 sont des supplémentaires de P dans $\mathbb{R}^3$, mais $D_1 \neq D_2$.

$\mathcal{P}$: fonctions paires, $\mathcal{I}$: fonctions impaires.

But : $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$.

1) $\mathcal{P}$ est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $f \in \mathcal{P}$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$

• $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

• $\vec{0}_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} = 0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}} : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0\end{array}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(-x) = 0 = 0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(x)$.

Donc $0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ est paire donc appartient à $\mathcal{P}$.

• Soient $f, g \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x)$

$= \lambda f(x) + g(x)$ car $f, g \in \mathcal{P}$.

$= (\lambda f + g)(x)$

Donc $\lambda f + g \in \mathcal{P}$.

Donc $\mathcal{P}$ est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

De même, $\mathcal{I}$ est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ sont en somme directe : montrons que $\mathcal{I} \cap \mathcal{P} = \{0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\}$.

Soit $f \in \mathcal{I} \cap \mathcal{P}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ $(f \in \mathcal{I})$

et $f(-x) = f(x)$ $(f \in \mathcal{P})$.

Donc pr $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(x)$, donc $f(x) = 0$

Donc f est la fonction nulle. Donc $\mathcal{I} \cap \mathcal{P} \subset \{0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\}$

et comme $\{0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\} \subset \mathcal{I} \cap \mathcal{P}$, $\mathcal{I} \cap \mathcal{P} = \{0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\}$.

Donc la somme est directe.

2. Vérifions que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{I} + \mathcal{P}$.

Evidemment, $\mathcal{I} + \mathcal{P} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{g(x) \in \mathcal{P}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{h(x) \in \mathcal{I}}$$

$$f = \overset{\mathcal{P}}{g} + \overset{\mathcal{I}}{h}$$

$f(x) = g(x) + h(x)$

$f(-x) = g(x) - h(x)$

$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x)$

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x) \qquad \frac{f(x)-f(-x)}{2} = h(x)$$

$$h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h(x)$$

Donc $f \in I + P$. Donc $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset I + P$.

Donc $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = I + P$.

Donc $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = I \oplus P$.

$$A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \quad B = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$