5. Somme de sev

3. Sous-espaces supplémentaires

$E = F \oplus G$. $\quad F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ et $E = F + G$.

$\dim E = \dim F + \dim G$.

Comment trouver le supplémentaire G de F.

Supposons $\dim F = p$. Soit $(\vec{x}_1, \dots \vec{x}_p)$ base de F.
$\dim E = n$
$(p \leq n)$ Donc $(\vec{x}_1, \dots \vec{x}_p)$ libre de E.

On complète $(\vec{x}_1, \dots \vec{x}_p)$ en une base $(\vec{x}_1, \dots \vec{x}_p, \vec{e}_{p+1}, \dots \vec{e}_n)$ de E.

Posons $G = \text{Vect}(\vec{e}_{p+1}, \dots \vec{e}_n)$. ($G$ est un sev de E).

Alors $E = F \oplus G = F + G$

$$\dim E = \underbrace{\dim F + \dim G - \dim(\underbrace{F \cap G}_{=\{\vec{0}_E\}})}_{=0}$$

Donc $\dim G = \dim E - \dim F$.

<u>Ex 104.</u> $\dim F = 2$, $E = \mathbb{R}^3$, $\dim E = 3$.

La dimension d'un supplémentaire de F dans E vaut $3 - 2 = 1$.

On complète $((1,1,1),(0,1,1))$ en une base de E.

Par exemple $((1,1,1),(0,1,1),(0,1,0))$ est une base de E car

$\Big($ $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ génératrice de $\mathbb{R}^3$.

$(0,1,0) = \lambda(1,1,1) + \mu(0,1,1) = (\lambda, \lambda+\mu, \lambda+\mu)$ $\Big)$ $(0,1,0) \notin \text{Vect}((1,1,1),(0,1,1))$

Rappel. Si $\vec{e}_p \notin \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_{p-1})$ alors $(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_{p-1}, \vec{e}_p)$ libre.

Posons $G = \text{Vect}((0,1,0))$. Alors $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

ou $G' = \text{Vect}((0,0,1))$ $\quad \mathbb{R}^3 = F \oplus G'$.

Si $E = F \oplus G$, $\dim E = \underbrace{\dim F + \dim G - \dim(\underbrace{F \cap G}_{=\{\vec{0}\}})}_{=0}$.

On a $F + G \subset E$, $\dim(F+G) =$

- $F \cap G = \{(0,0,0)\}$

$\mathbb{R}^3 = F + G$ ... assez pénible.

Ici $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim G = 1$

$F = \{(x, y, -x-y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

$\dim F = 2$.

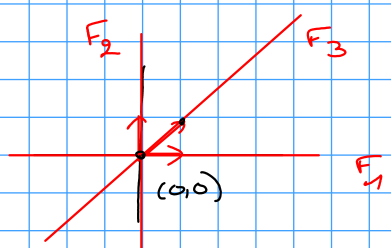
- $\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3$ Donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

4. Somme de plusieurs sev

Cours 7 (2)

$F + G = F \oplus G$ ssi $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.

$F + G + H = F \oplus G \oplus H$ ssi
$F \cap (G+H) = \{\vec{0}\}$
$G \cap (F+H) = \{\vec{0}\}$
$H \cap (F+G) = \{\vec{0}\}$.

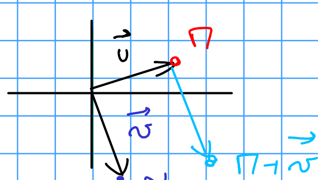


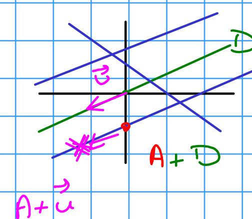
$n = 3$. $E = F \oplus G \oplus H$. $(\vec{f}_1, \dots \vec{f}_p)$ base de F, $(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q)$ base de G,
$(\vec{h}_1, \dots \vec{h}_r)$ base de H.

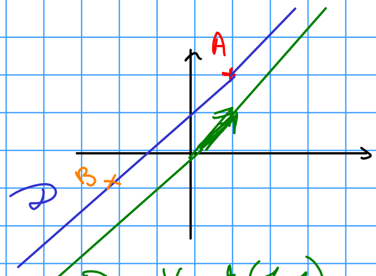
Alors $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \dots \vec{g}_q, \vec{h}_1, \dots \vec{h}_r)$ est une base de E.

5. Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Cours 7 (3)

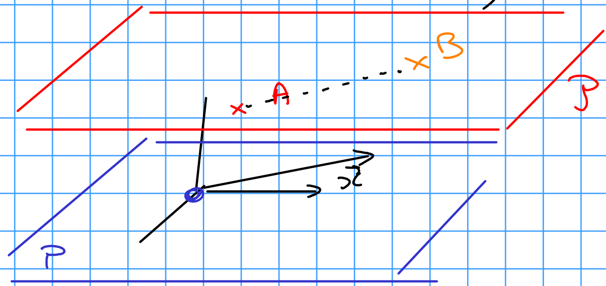






$\mathcal{D} = A + D = B + \mathcal{D}$

$D = \mathrm{Vect}(1,1)$ de dim 1, donc $\mathcal{D}$ est de dim 1.



$\mathcal{P}$ est de dim 2.

$\mathcal{P} = A + P$

$= B + P$.

$B = A + \vec{x}$

Ex 125. $\mathcal{D} : \begin{cases} x+y=2 \\ x-y+z=1 \end{cases}$

① Trouver un point appartenant à $\mathcal{D}$.

$(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1) \in \mathcal{D}$.

② On a $\begin{cases} x_0+y_0=2 \\ x_0-y_0+z_0=1 \end{cases}$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. $(x,y,z) \in \mathcal{D}$ ssi $\begin{cases} x+y=2 = x_0+y_0 \\ x-y+z=1 = x_0-y_0+z_0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} (x-x_0)+(y-y_0)=0 \\ (x-x_0)-(y-y_0)+(z-z_0)=0 \end{cases}$

ssi $\underbrace{(x-x_0, y-y_0, z-z_0)}_{=(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)} \in D : \begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$.

ou $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y=0 \text{ et } x-y+z=0\}$

$= \{(x,-x,-2x), x \in \mathbb{R}\}$.

ssi $(x,y,z) \in (x_0,y_0,z_0) + D$

Donc $\mathcal{D} = (x_0,y_0,z_0) + D = (1,1,1) + D$.

$D = \mathrm{Vect}((1,-1,-2))$ est une droite vectorielle.

• Posons $P_0 = X$. On a $XP_0' + P_0 = 2X$.

$P \in \mathbb{R}[X]$. $P \in \mathcal{P}$ ssi $XP' + P = 2X = XP_0' + P_0$

ssi $X(P-P_0)' + (P-P_0) = 0$

ssi $P - P_0 \in F = \{P \,/\, XP' + P = 0\}$

ssi $P \in P_0 + F$.

Donc $\mathcal{P} = P_0 + F = X + F$

$B \in \mathcal{F}$

ssi $\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{B-A} \in F$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ ssi $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + n$

$= 4u_{n+1} - 4u_n + v_{n+2} - 4v_{n+1} - 4v_n$

$v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n + n$

ssi $u_{n+2} - v_{n+2} = 4(u_{n+1} - v_{n+1}) - 4(u_n - v_n)$

ssi $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_R$