Bilan Chapitre 1.

- Montrer que E est un ev (ou que F est un sev de l'ev E).
  → caractérisation
  ou → Ecrire comme un Vect.
- Manipuler les Vect.
  Si $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ alors $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$
- Montrer qu'une famille est libre, génératrice ou une base.
  ↳ Directement
  ↳ Argument de dimension.
- Trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Si $\dim E = n$, une famille
  - libre a au plus n éléments
  - génératrice a au moins n éléments
- Savoir compléter une famille libre en une base.
- Savoir extraire une base d'une famille génératrice.
- Connaître les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$.
- Trouver une base d'un sev F (en écrivant F comme un Vect)
- Déterminer la dimension d'un ev.
- Connaître les dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$.
- Comprendre $F+G$
- Formule de Grassmann
- Montrer que $F \oplus G = E$ → $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$
  → $E = F + G$ ou $\dim F + \dim G = \dim E$
  $(h = f + g)$
  (lorsque E est de dim infinie ou si on ne connait pas la dimension)
- Notion d'espace supplémentaire et savoir trouver un supplémentaire d'un sev F dans E.

- Montrer qu'un espace est un sous-espace affine $\mathcal{F}$
  - trouver un élément A de $\mathcal{F}$
  - trouver un sev F tel que $\forall B \in E$, $B \in \mathcal{F}$ ssi $B - A \in F$.

    Alors $\mathcal{F} = A + F$.

$n\mathbb{Z} = \{ n \times k,\ k \in \mathbb{Z} \}$ $\qquad A\mathbb{K}[X] = \{ AP,\ P \in \mathbb{K}[X] \}$.

$2 \in \mathbb{K}[X]$. $\qquad \frac{1}{2} \in \mathbb{K}[X]$.

Prop 3.

Supp. $A \mid B$ et $B \mid A$. Alors $\begin{cases} B = PA & \text{avec } P \in \mathbb{K}[X] \\ A = QB & \text{avec } Q \in \mathbb{K}[X] \end{cases}$

Donc $A = QPA$, donc $A(1 - PQ) = 0$.

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre ($ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$)

Donc $A = 0$ alors $B = 0$ et $A = 1 \times B$.

ou $1 - PQ = 0$, ie $PQ = 1$, donc $\underbrace{\deg P}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\deg Q}_{\in \mathbb{N}} = 0$

donc $\deg P = \deg Q = 0$. Donc $P = \lambda \in \mathbb{K}^*$,

et donc $B = \lambda A$ et $A = \frac{1}{\lambda} B$.

Prop 5. Si $A \mid B$ alors $B = AP$, on a $\deg B = \underbrace{\deg A}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\deg P}_{\in \mathbb{N}}$
et si $B \neq 0$

$\geq \deg A$

$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2\ \exists! (q,r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = qp + r$ et $0 \leq r < p$

. $A = B \times Q + R = \lambda \times \frac{1}{\lambda} A + 0$ et $-\infty < 0$.

Si $\deg A < m$ alors $A = B \times 0 + A$ et $\deg A < m = \deg B$.

$A = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$. et on sait que $n \geq m$

$\frac{a_n}{b_m} X^{n-m}$ $\quad B \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} (b_m X^m + \dots + b_1 X + b_0)$

$= a_n X^n + \frac{a_n}{b_m} X^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{b_m} b_0 X^{n-m}$

Donc $A - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} B = a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 - \frac{a_n}{b_m} X^{n-1} + \dots - \frac{a_n}{b_m} b_0 X^{n-m}$

de degré $< n$.

$$A - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} B = Q_1 B + R \quad \text{avec } \deg R < \deg B$$

Donc $A = B\underbrace{\left(Q_1 + \frac{a_n}{b_m} X^{n-m}\right)}_{Q} + R$ et $\deg R < \deg B$

$$\begin{cases} A = BQ_1 + R_1 \\ A = BQ_2 + R_2 \end{cases} \quad \text{avec } \begin{array}{l} \deg R_1 < \deg B \\ \deg R_2 < \deg B . \end{array}$$

Donc $BQ_2 - BQ_1 = R_1 - R_2$

$B(Q_2 - Q_1) = R_1 - R_2$.

Si $Q_1 \neq Q_2$, $\deg B + \underbrace{\deg(Q_2 - Q_1)}_{\in \mathbb{N}} = \deg(R_1 - R_2) \geq \deg B$.

$= \max(\deg R_1, \deg R_2)$

$< \deg B$.

Absurde. Donc $Q_1 = Q_2$.

Donc $R_1 = R_2$

$$\begin{array}{l|l}
X^5 + 4X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 1 & X^3 - 2X + 3 \\ \cline{2-2}
-\ (X^5 - 2X^3 + 3X^2) & X^2 + 4X + 4 \\ \cline{1-1}
 4X^4 + 4X^3 - 2X^2 - X - 1 & \\
-\ (4X^4 - 8X^2 + 12X) & \\ \cline{1-1}
 4X^3 + 6X^2 - 13X - 1 & \\
-\ (4X^3 - 8X + 12) & \\ \cline{1-1}
 6X^2 - 5X - 13 &
\end{array}$$

$A = BQ + R$

avec $\deg R < 3$

Donc $X^5 + 4X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 1 = (X^3 - 2X + 3)(X^2 + 4X + 4)$

$+ 6X^2 - 5X - 13$.

2. Racines

1. Définition

-1 est racine de P, donc $X-(-1) = X+1$ divise P.

$$\begin{array}{r|l} X^3+2X^2+2X+1 & X+1 \\ \cline{2-2} -\ (X^3+X^2) & X^2+X+1 \\ \cline{1-1} X^2+2X+1 & \\ X^2+X & \\ \cline{1-1} X+1 & \\ X+1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Donc $X^3+2X^2+2X+1 = (X+1)(X^2+X+1)$.

2. Multiplicité d'une racine

$m = \max\{k \in \mathbb{N},\ (X-\alpha)^k \mid P\}$.

$(X-1)^2 \mid P$ alors 1 est racine de P de multiplicité ≥ 2

$P = (X-1)^2 Q$. $\quad P(1) = 0$

$P = (X+1)\underbrace{(X^2+X+1)}_{Q}$ $\quad -1$ est racine simple de P

$Q(-1) = 1 \neq 0$

Les racines de P comptées avec multiplicité sont :

$0, -1, -1, 4, 4, 4$. Donc 6 racines comptées avec multiplicité.

ou P a 3 racines distinctes.

$P = (X-\alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

$P' = m(X-\alpha)^{m-1} Q + (X-\alpha)^m Q'$

$= (X-\alpha)^{m-1}\underbrace{(mQ + (X-\alpha)Q')}_{Q_1}$ et $Q_1(\alpha) = mQ(\alpha) \neq 0$.