Chap 2. Les polynômes

II. Racines

2. Multiplicité

α est racine simple de P ssi $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$.
$m = 1$

α est racine double de P ssi $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) = 0$ et $P''(\alpha) \neq 0$
$m = 2$

Si $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) = 0$, ... $P^{(k)}(\alpha) = 0$ alors α est racine de P de multiplicité $\geq k$.

On a, comme $k \geq m$, $(X-\alpha)^k = (X-\alpha)^m (X-\alpha)^{\overbrace{k-m}^{\geq 0}}$

Ex 20. $P = X^n - 1$. $P(\alpha) =$

Soit α une racine de P. Alors $\alpha^n - 1 = 0$. donc $\alpha \neq 0$

On a $P' = nX^{n-1}$ donc $P'(\alpha) = \underbrace{n}_{\neq 0} \alpha^{n-1} \neq 0$

Donc α est racine simple de P.

1 est racine de P, donc 1 est racine simple,

donc $X^n - 1 = (X-1)Q$ et $Q(1) \neq 0$.

$P = X^2 + 1$ $\in \mathbb{R}[X]$ / $\in \mathbb{C}[X]$

P n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$

mais i est racine de P dans $\mathbb{C}$

$\bar{i} = -i$

$X^2 + 1 = (X+i)^1 (X-i)^1$.

$\overline{a+ib} = a - ib$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ avec les $a_i \in \mathbb{R}$,

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. $\overline{a_i} = a_i$

$P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n \alpha^n$

$P(\bar{\alpha}) = a_0 + a_1\bar{\alpha} + \dots + a_n \bar{\alpha}^n = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\bar{\alpha} + \dots + \overline{a_n}\,\overline{\alpha^n}$

$= \overline{a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n}$

$= \overline{P(\alpha)}$.

Rappels : $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

$\overline{z_1} \times \overline{z_2} = \overline{z_1 \times z_2}$

Si α est racine de P alors $P(\alpha)=0$ $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$.

donc $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0$. Donc $\overline{\alpha}$ est racine de P.

Si $\overline{\alpha}$ est racine de P alors $P(\overline{\alpha})=0$

donc $\overline{P(\alpha)} = P(\overline{\alpha}) = 0$. donc $P(\alpha)=0$.

Donc α est racine de P.

$$P^{(k)}(\overline{\alpha}) = \overline{P^{(k)}(\alpha)}$$

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \qquad 1+j+j^2=0.$$

3. Nombre de racines et degré du polynôme.

Si α_1 est racine de P de multiplicité m_1, α_2 de multiplicité m_2

alors $P = (X-\alpha_1)^{m_1}\varphi_1$ et $\varphi_1(\alpha_1)\neq 0$

$$= (X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\varphi_2 \quad \text{et} \quad \varphi_2(\alpha_1)\neq 0$$

$$\varphi_2(\alpha_2)\neq 0.$$

$P = (X-1)^n$ de degré et 1 est racine de P de multiplicité n.

$= (X-1)(X-1)\dots(X-1)$

$\varphi = (X-1)(X-2)\dots(X-n)$ de degré n et admet n racines distinctes.

X^2+1 dans $\mathbb{R}$: n'admet pas de degré.

$X^2+1 = (X-i)(X+i)$ dans $\mathbb{C}$: admet 2 racines.

Soit P un polynôme tel que pour tout $\alpha \in [0,1]$, $P(\alpha)=0$

alors P est le polynôme nul. (car P admet une infinité de racines).

Si $\deg P \leq n$ et P admet plus de $n+1$ racines alors P est le polynôme nul.

Soient P et Q de degrés $\leq n$.

On suppose que $P(\alpha_1) = Q(\alpha_1)$, $\vdots$, $P(\alpha_{n+1}) = Q(\alpha_{n+1})$ où les α_i sont $n+1$ points distincts.

Alors $P = Q$.

On a $(P-Q)(\alpha_1) = 0, \ldots, (P-Q)(\alpha_{n+1}) = 0$. Donc $P-Q$ est de degré $\leq n$ et $P-Q$ a au moins $n+1$ racines, donc $P-Q = 0$, donc $P = Q$.

$$P = a_0 + aX + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$$

et $\tilde{P} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \end{array}$

$P = \bar{1}X^2 + \bar{1}X$ polynôme non nul.

$\tilde{P} : \begin{array}{l} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ x \mapsto \bar{1}x^2 + \bar{1}x \end{array}$

$\tilde{P}(\bar{0}) = \bar{1} \times \bar{0}^2 + \bar{1} \times \bar{0} = \bar{0}$

$\tilde{P}(\bar{1}) = \bar{1} \times \bar{1}^2 + \bar{1} \times \bar{1} = \bar{2} = \bar{0}$

Donc $\tilde{P}$ est la fonction nulle.

4. Polynôme scindé et théorème de d'Alembert-Gauss

Cours 9 (2)

$(X-1)(X-2)$: scindé à racines simples

$(X-1)^2$: scindé

$X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}$ n'a pas de racine.

$$a(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \ldots (X-\alpha_r)^{m_r}$$

$$= a\,\underbrace{(X-\alpha_1)\times \cdots (X-\alpha_1)}_{m_1 \text{ fois}} \times \underbrace{(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_2)}_{m_2 \text{ fois}} \times \cdots \times \underbrace{(X-\alpha_r)\cdots(X-\alpha_r)}_{m_r \text{ fois}}$$

$$= (aX - a\alpha_1)(X-\alpha_1)\ldots$$

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = a_n \prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)^{m_i}.$$

coefficient dominant.

$\forall k \in \{0 .. n-1\}, \quad \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = e^{2ik\pi} = 1$

$e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est racine de $X^n - 1$.

Donc, $X^n - 1$ étant de degré n, ses racines sont exactement les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0 .. n-1\}$.

Donc $X^n - 1 = (X - \underbrace{e^{\frac{2i \times 0 \pi}{n}}}_{1})(X - e^{\frac{2i\pi}{n}}) \cdots (X - e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}})$

U_n : ensemble des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

$U_n = \{ z \in \mathbb{C}, \; z^n = 1 \} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \; k \in \{0 .. n-1\} \right\}$.

$P = X^8 + 3X^7 + X - 5 \in \mathbb{C}[X]$

Donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que α est racine de P, donc $\overline{\alpha}$ l'est aussi

Donc $\underbrace{X^8 + 3X^7 + X - 5}_{\deg 8} = \underbrace{(X - \alpha)(X - \overline{\alpha})}_{\deg 2} \underbrace{Q}_{\deg 6}$.

$= (X - \alpha)(X - \overline{\alpha})(X - \delta)(X - \overline{\delta}) \underbrace{R}_{\deg 4}$.

$= \prod_{i=1}^{4} (X - r_i)(X - \overline{r_i})$ avec $r_i \in \mathbb{C}$.

5. Relations coefficients-racines.

$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = a_n (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n)$

$X^3 - X^2 - X + 1 = (X - 1) Q$