



Géométrie 2

ÉCOLE CENTRALE DE PÉKIN

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

31 mars 2021

Table des matières

1	Espaces vectoriels	1
1.1	Structure d'espace vectoriel	1
1.1.1	Premières définitions	1
1.1.2	Premiers exemples fondamentaux	2
1.1.3	Quelques règles de calcul	5
1.1.4	Combinaisons linéaires	6
1.2	Sous-espace vectoriel	7
1.2.1	Définition	7
1.2.2	Sous-espace vectoriel engendré par une partie	10
1.3	Familles de vecteurs	13
1.3.1	Familles génératrices	13
1.3.2	Familles libres et liées	14
1.3.3	Bases	17
1.4	Espaces vectoriels de dimension finie	18
1.4.1	Définition	18
1.4.2	Existence de bases finies	19
1.4.3	Dimension	20
1.4.4	Caractérisation des bases en dimension finie	21
1.4.5	Dimension d'un sous-espace vectoriel	23
1.4.6	Rang d'une famille de vecteurs	24
1.4.7	Matrice d'une famille de vecteurs	24
1.5	Somme de sous-espaces vectoriels	25
1.5.1	Somme de deux sous-espaces vectoriels	25
1.5.2	Somme directe	26
1.5.3	Sous-espaces vectoriels supplémentaires	27

Chapitre 1 Espaces vectoriels

De nombreux problèmes de mathématiques ou de physique vérifient la propriété suivante : si u et v sont deux solutions d'un problème alors $u + v$ est aussi solution de ce problème, ainsi que ku , k étant un nombre réel ou complexe. Ces problèmes sont dit linéaires et sont souvent plus faciles à résoudre que les problèmes plus généraux, dits non linéaires. Ce chapitre est le premier chapitre d'algèbre linéaire.

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Tous les résultats présentés demeurent vrais sur un corps quelconque.

1.1 STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

1.1.1 Premières définitions

DÉFINITION 1

On appelle **espace vectoriel sur \mathbb{K}** \域 \mathbb{K} 上的线性空间 / 向量空间\, ou **\mathbb{K} -espace vectoriel**, tout triplet $(E, +, \cdot)$ où E est un ensemble et

- $+$ est une loi de composition interne sur $E : E \times E \longrightarrow E ; (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} + \vec{y}$,
- \cdot est une loi de composition externe de \mathbb{K} sur $E : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E ; (\lambda, \vec{x}) \longmapsto \lambda \cdot \vec{x}$,

vérifiant les propriétés suivantes :

1. $(E, +)$ est un groupe abélien,
2. pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$,
 - (a) $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$,
 - (b) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$,
 - (c) $(\lambda\mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x})$,
 - (d) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

REMARQUE 2 — Souvent, on parle du \mathbb{K} -espace vectoriel E à la place du \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on ne précise pas nécessairement le corps \mathbb{K} .

DÉFINITION 3

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- Les éléments de l'espace vectoriel E sont appelés les **vecteurs** \向量\.
- Les éléments de \mathbb{K} sont appelés les **scalaires** \标量\.
- La loi $+$ est appelée **addition**.
- La loi \cdot est appelée **multiplication par un scalaire**.
- L'élément neutre du groupe $(E, +)$ est noté $\vec{0}_E$ ou $\vec{0}$ et est appelé le **vecteur nul** de E .

⚠ Il ne faut pas confondre le vecteur nul $\vec{0}_E$ de E et le scalaire nul 0 de \mathbb{K} .

REMARQUE 4 — La notation $\lambda \cdot \vec{x}$ est souvent remplacée par $\lambda\vec{x}$. Mais on n'écrit pas $\vec{x}\lambda$. Les flèches sur les vecteurs de E sont également souvent omises : on note x à la place de \vec{x} .

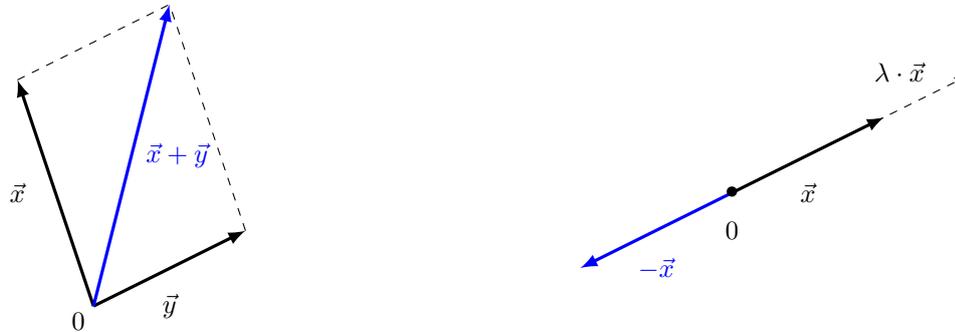
Les règles que nous venons de définir sont celles que l'on connaît déjà sur les vecteurs du plan et de l'espace : en considérant deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} , on peut

- sommer ces vecteurs : $\vec{x} + \vec{y}$,
- faire la différence de ces vecteurs : $\vec{x} - \vec{y}$,

- multiplier \vec{x} par un scalaire $\lambda : \lambda \cdot \vec{x}$,
- calculer des expressions de la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i$, où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\vec{x}_i \in E$ et $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Par contre, la multiplication de deux vecteurs n'est pas définie.

Nous pourrions nous représenter les espaces vectoriels à l'aide d'un modèle géométrique qui pourra nous aider à visualiser les problèmes. Il faudra alors considérer des vecteurs ayant tous la même origine, ce point jouant le rôle du vecteur nul.



1.1.2 Premiers exemples fondamentaux

Nous donnons des exemples fondamentaux d'espaces vectoriels. Les vérifications sont faciles mais longues.

1.1.2.a. L'ensemble \mathbb{K}^n

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. On munit \mathbb{R}^n des lois suivantes :

Pour tout $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et tout $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ éléments de \mathbb{R}^n et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

- * $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$,
- * $\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.

Alors $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Preuve —

1. $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien, donc $(\mathbb{R}^n, +)$ l'est aussi.
2. (a) Soient $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ des éléments de \mathbb{R}^n , et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) &= \lambda \cdot (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \dots, \lambda(x_n + y_n)) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n) \\ &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n) \\ &= \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}. \end{aligned}$$

- (b) Soient $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot \vec{x} &= ((\lambda + \mu)x_1, \dots, (\lambda + \mu)x_n) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_1, \dots, \lambda x_n + \mu x_n) \\ &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \dots, \mu x_n) \\ &= \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}. \end{aligned}$$

- (c) Soient $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et λ et μ des éléments de \mathbb{R} . On a

$$(\lambda\mu) \cdot \vec{x} = ((\lambda\mu)x_1, \dots, (\lambda\mu)x_n) = (\lambda(\mu x_1), \dots, \lambda(\mu x_n)) = \lambda \cdot (\mu x_1, \dots, \mu x_n) = \lambda \cdot (\mu \cdot (x_1, \dots, x_n)) = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}),$$

- (d) Soit $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a $1 \cdot \vec{x} = (1x_1, \dots, 1x_n) = (x_1, \dots, x_n) = \vec{x}$.

□

Notons qu'un vecteur de \mathbb{R}^n est un n -uplet (x_1, \dots, x_n) où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \in \mathbb{R}$.

Le vecteur nul de \mathbb{R}^n est $\vec{0}_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$.

En particulier, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Un vecteur est alors un réel et $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \times x$, multiplication entre deux réels.

On retrouve les vecteurs du plan avec \mathbb{R}^2 et les vecteurs de l'espace avec \mathbb{R}^3 .

EXEMPLE 5 — Dans \mathbb{R}^3 , $(1, 2, 0) + 2 \cdot (0, 1, 1) = (1, 4, 2)$.

- De même, $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel, mais aussi un \mathbb{R} -espace vectoriel.

En particulier, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Les vecteurs sont les nombres complexes et les scalaires sont les nombres réels. On a $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \times x$, multiplication entre un réel et un complexe.

REMARQUE 6 — Plus généralement, tout espace vectoriel sur \mathbb{C} est aussi un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

1.1.2.b. L'ensemble des polynômes

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à n . On munit $\mathbb{R}_n[X]$ des lois suivantes :

Pour tout $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ et $Q = b_0 + b_1X + \dots + b_nX^n$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$* P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \dots + (a_n + b_n)X^n,$$

$$* \lambda \cdot P = \lambda a_0 + \lambda a_1X + \dots + \lambda a_nX^n.$$

Alors $(\mathbb{R}_n[X], +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Preuve — Exercice. □

Notons qu'un vecteur de $\mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme P qui s'écrit sous la forme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i \in \mathbb{R}$.

Le vecteur nul de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\vec{0}_{\mathbb{R}_n[X]} = 0$, le polynôme nul.

- De même $(\mathbb{C}_n[X], +, \cdot)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel, mais aussi un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- Plus généralement, $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel, où $+$ et \cdot sont les opérations usuelles sur les polynômes.

EXEMPLE 7 — Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $1 + X + X^2 - 2(X - X^2) = 1 - X + 3X^2$.

1.1.2.c. L'ensemble des matrices

- Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans \mathbb{K} . On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ des lois suivantes :

Pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et tout $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$* A + B = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix},$$

$$* \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

Alors $(\mathcal{M}_2(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Preuve — Exercice. □

Notons qu'un vecteur de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Le vecteur nul de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est $\vec{0}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

EXEMPLE 8 — Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Plus généralement, pour tout $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel (voir cours d'algèbre 2), où $+$ et \cdot sont les opérations usuelles sur les matrices.

1.1.2.d. L'ensemble des suites

Soit $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans \mathbb{K} . On munit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des lois suivantes :

Pour tout $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et tout $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$* (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

$$* \lambda \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Alors $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Preuve — Exercice. □

Le vecteur nul de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est la suite nulle $(0)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.1.2.e. Le produit d'espaces vectoriels

Soient E_1, \dots, E_n des \mathbb{K} -espaces vectoriels. Posons $E = E_1 \times \dots \times E_n$, le produit cartésien de E_1, \dots, E_n . On munit E des lois suivantes :

Pour tout $\vec{x} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ et tout $\vec{y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ éléments de E et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$* \vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \dots, \vec{x}_n + \vec{y}_n),$$

$$* \lambda \cdot \vec{x} = (\lambda \cdot \vec{x}_1, \dots, \lambda \cdot \vec{x}_n).$$

Alors $(E_1 \times \dots \times E_n, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel. On l'appelle l'**espace vectoriel produit** \ 积空间 \.

Preuve — La preuve est proche de celle faite pour $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$. Vérifions seulement deux points de la définition.

• Pour tout $\vec{x} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E$, $1 \cdot (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = (1 \cdot \vec{x}_1, \dots, 1 \cdot \vec{x}_n) = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \vec{x}$.

• Pour tout $\vec{x} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ et $\vec{y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ éléments de E , et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) &= \lambda \cdot (\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \dots, \vec{x}_n + \vec{y}_n) \\ &= (\lambda \cdot (\vec{x}_1 + \vec{y}_1), \dots, \lambda \cdot (\vec{x}_n + \vec{y}_n)) \\ &= (\lambda \cdot \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{y}_1, \dots, \lambda \cdot \vec{x}_n + \lambda \cdot \vec{y}_n) \\ &= (\lambda \cdot \vec{x}_1, \dots, \lambda \cdot \vec{x}_n) + (\lambda \cdot \vec{y}_1, \dots, \lambda \cdot \vec{y}_n) \\ &= \lambda \cdot (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) + \lambda \cdot (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n) \\ &= \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}. \end{aligned}$$

□

Le vecteur nul de $E_1 \times \dots \times E_n$ est $\vec{0}_{E_1 \times \dots \times E_n} = (\vec{0}_{E_1}, \dots, \vec{0}_{E_n})$.

REMARQUE 9 — Ainsi, on retrouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1.1.2.f. L'ensemble des applications de X dans E

Soient X un ensemble non vide et E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On munit l'ensemble $\mathcal{F}(X, E)$ des applications de X dans E des lois suivantes :

Pour tout f et tout g éléments de $\mathcal{F}(X, E)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

* $f + g$ est l'application de X dans E définie, pour tout $x \in X$, par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

* $\lambda \cdot f$ est l'application de X dans E définie, pour tout $x \in X$, par

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot (f(x)).$$

Alors $(\mathcal{F}(X, E), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Preuve — Démontrons seulement deux points de la définition.

Soient f et g des éléments de $\mathcal{F}(X, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

• On a $1 \cdot f = f$. En effet, pour tout $x \in X$, $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot (f(x)) = f(x)$.

- On a $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$. En effet, pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot (f + g))(x) &= \lambda \cdot ((f + g)(x)) \\ &= \lambda \cdot (f(x) + g(x)) \\ &= \lambda \cdot (f(x)) + \lambda \cdot (g(x)) \\ &= (\lambda \cdot f)(x) + (\lambda \cdot g)(x) \\ &= (\lambda \cdot f + \lambda \cdot g)(x). \end{aligned}$$

□

Le vecteur nul de $\mathcal{F}(X, E)$, $\vec{0}_{\mathcal{F}(X, E)}$, est l'application nulle : $X \longrightarrow E ; x \longmapsto \vec{0}_E$.

EXEMPLE 10 — Pour tout intervalle I de \mathbb{R} , l'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions de I dans \mathbb{R} est un \mathbb{R} -espace vectoriel pour l'addition des fonctions et leur multiplication par un réel. Il s'agit du cas particulier où $X = I$ et $E = \mathbb{R}$.

EXEMPLE 11 — Prenons $X = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Soient f et g éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = (1 + x, x^2) \quad \text{et} \quad g(x) = (\exp(x), -x).$$

Alors $f + g$ est l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$(f + g)(x) = (x + 1 + \exp(x), x^2 - x).$$

REMARQUE 12 — On retrouve que l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ des suites à valeurs dans \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour l'addition des suites et leur multiplication par un élément de \mathbb{K} .

1.1.3 Quelques règles de calcul

PROPOSITION 13

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Pour tout $\vec{x} \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$.
- $\lambda \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E$,
- $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\vec{x} = \vec{0}_E$.
- $\overrightarrow{-x} = (-1) \cdot \vec{x}$, où $\overrightarrow{-x}$ est l'opposé de \vec{x} dans le groupe $(E, +)$ et -1 est l'opposé de 1 dans le groupe $(\mathbb{K}, +)$.

Preuve — Soient $\vec{x} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On a $0 \cdot \vec{x} = (0 + 0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}$.
Donc, par simplification dans le groupe $(E, +)$, $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$.
- On a $\lambda \cdot \vec{0}_E = \lambda \cdot (\vec{0}_E + \vec{0}_E) = \lambda \cdot \vec{0}_E + \lambda \cdot \vec{0}_E$.
Donc, par simplification dans le groupe $(E, +)$, $\lambda \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E$.
- D'après les points précédents, si $\lambda = 0$ ou $\vec{x} = \vec{0}_E$ alors $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$.
Réciproquement, supposons que $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$.
1^{er} cas : $\lambda = 0$.
2nd cas : $\lambda \neq 0$. Alors $\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \left(\frac{1}{\lambda} \times \lambda\right) \cdot \vec{x} = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot \vec{x}) = \frac{1}{\lambda} \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E$.
D'où le résultat.
- On a $\vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = (1 - 1) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$.
Donc $\overrightarrow{-x} = (-1) \cdot \vec{x}$.

□

PROPOSITION 14

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- Pour tout $\vec{x} \in E$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ éléments de \mathbb{K} ,

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i \cdot \vec{x}) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \cdot \vec{x}.$$

- Pour tous $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ éléments de E , et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\sum_{i=1}^n (\lambda \cdot \vec{x}_i) = \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^n \vec{x}_i \right).$$

Preuve — Ces deux propriétés se démontrent par récurrence en utilisant les points suivants de la définition d'un espace vectoriel :

- $\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x} = (\lambda + \mu) \cdot \vec{x}$,
- $\lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y} = \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y})$.

□

1.1.4 Combinaisons linéaires

DÉFINITION 15

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ des éléments de E . Soit $\vec{x} \in E$.

On dit que \vec{x} est **combinaison linéaire** \ 线性组合 \ des vecteurs $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ si \vec{x} s'écrit sous la forme

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des éléments de \mathbb{K} .

REMARQUES 16

- Une combinaison linéaire d'un seul vecteur \vec{x} est donc un vecteur de la forme $\lambda \cdot \vec{x}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Une combinaison linéaire de deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} est donc un vecteur de la forme $\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

EXEMPLES 17

- Dans $\mathbb{R}_3[X]$, le polynôme $2 + X - 3X^3$ est, par exemple, combinaison linéaire des polynômes $1, X$ et X^3 avec $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -3$.
- Plus généralement, tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ s'écrit comme combinaison linéaire des polynômes $1, X, \dots, X^n$.
- Dans \mathbb{R}^2 , le vecteur $(2, 7)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(5, -2)$ et $(1, -3)$:

$$(2, 7) = (5, -2) - 3(1, -3).$$

Pour trouver cette combinaison linéaire, on cherche des réels λ et μ tels que

$$(2, 7) = \lambda(5, -2) + \mu(1, -3).$$

Cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} 2 = 5\lambda + \mu \\ 7 = -2\lambda - 3\mu \end{cases}.$$

- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire des matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En effet, M est combinaison linéaire de ces matrices si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3$, soit encore si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & -\lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

soit finalement, si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ -\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

Or ce système n'admet pas de solutions. D'où le résultat.

◇ En général, l'égalité $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot \vec{x}_i$ n'implique pas que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i = \mu_i$.

EXEMPLE 18 — Dans \mathbb{R}^2 , le vecteur $(3, 3)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$ mais il n'y a pas unicité des λ_i :

$$\begin{aligned} (3, 3) &= 1 \cdot (1, 1) + 2 \cdot (0, 1) + 2 \cdot (1, 0) \\ &= 2 \cdot (1, 1) + 1 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (1, 0). \end{aligned}$$

DÉFINITION 19

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit $\vec{x} \in E$. On dit que \vec{x} est **combinaison linéaire** de la famille $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ si \vec{x} est combinaison linéaire d'une sous-famille **finie** $(\vec{x}_{i_1}, \dots, \vec{x}_{i_p})$, c'est-à-dire \vec{x} s'écrit sous la forme

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^p \lambda_{i_p} \cdot \vec{x}_{i_p},$$

où $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_p} \in \mathbb{K}$.

EXEMPLE 20 — Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est combinaison linéaire finie de la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.2 SOUS-ESPACE VECTORIEL

Dans cette partie, $(E, +, \cdot)$ désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1.2.1 Définition

DÉFINITION 21

Soit F une partie non vide de E . On dit que F est un **sous-espace vectoriel de E** 子空間 si F est stable par les lois $+$ et \cdot (c'est-à-dire, $F + F \subset F$ et $\mathbb{K} \cdot F \subset F$) et si F est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour les lois $+$ et \cdot induites sur F .

REMARQUE 22 — Si F est un sous-espace vectoriel de E alors F est un sous-groupe de $(E, +)$, donc $\vec{0}_F = \vec{0}_E \in F$. Un sous-espace vectoriel contient donc toujours le vecteur nul.

EXEMPLE 23 — Les ensembles $\{\vec{0}_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E , dits **triviaux**.

Le résultat suivant est celui que l'on utilise majoritairement pour montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E . Il évite de vérifier les nombreux points de la définition d'un espace vectoriel.

PROPOSITION 24 (Caractérisation)

Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1. $F \subset E$,
2. $\vec{0}_E \in F$,
3. F est stable par combinaison linéaire \ 对线性组合是封闭的 \ : pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in F.$$

Preuve — \triangleright Soit F un sous-espace vectoriel de E .

Alors, par définition $F \subset E$.

D'après la remarque précédente, F étant un sous-groupe de $(E, +)$, $\vec{0}_E \in F$.

Soient $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. F étant stable par la loi \cdot , $\lambda \cdot \vec{x} \in F$. F étant stable par la loi $+$, $\lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in F$.

D'où les trois points de la caractérisation.

\triangleleft Réciproquement, supposons les points 1, 2 et 3 vérifiés.

F est une partie non vide de E puisque $F \subset E$ et $\vec{0}_E \in F$. Pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$, $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-1) \cdot \vec{y} \in F$ d'après le point 3. Donc F est un sous-groupe de $(E, +)$. $(E, +)$ étant commutatif, $(F, +)$ l'est aussi.

Les autres points de la définition d'un espace vectoriel sont vérifiés car ils le sont pour les éléments de E donc *a fortiori* pour les éléments de F .

D'où le résultat. □

REMARQUE 25 — Pour montrer qu'un ensemble F muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire est un espace vectoriel, on peut montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu (voir les exemples de la partie 1.1.2). On prendra garde à ne pas oublier de préciser quel est cet espace vectoriel plus grand.

REMARQUE 26 — Le point 3 peut être séparé en deux points :

- 3.1. Pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$, $\vec{x} + \vec{y} \in F$
- 3.2. Pour tout $\vec{x} \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot \vec{x} \in F$.

Preuve — \triangleright Supposons que pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in F$.

Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$. Alors $\vec{x} + \vec{y} = 1 \cdot \vec{x} + \vec{y} \in F$.

Soient $\vec{x} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \vec{0}_E \in E$ puisque $\vec{0}_E \in F$.

\triangleleft Réciproquement, supposons les deux points vérifiés. Soient $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda \cdot \vec{x} \in F$. Puis comme $(\lambda \cdot \vec{x}, \vec{y}) \in F^2$, $\lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in F$

D'où le résultat. □

EXEMPLES 27

- Soit \vec{u} un vecteur de \mathbb{R}^2 . L'ensemble $\mathbb{R} \cdot \vec{u} = \{\lambda \cdot \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 , appelé la **droite vectorielle engendrée par \vec{u}** .

Preuve —

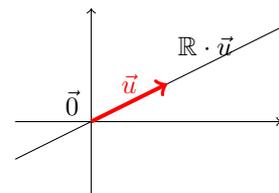
1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ donc $\mathbb{R} \cdot \vec{u} \subset \mathbb{R}^2$.
2. $\vec{0}_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) = 0 \cdot \vec{u} \in \mathbb{R} \cdot \vec{u}$.
3. Soient (\vec{x}, \vec{y}) des éléments de $\mathbb{R} \cdot \vec{u}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
 Comme $\vec{x} \in \mathbb{R} \cdot \vec{u}$, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{u}$.
 Comme $\vec{y} \in \mathbb{R} \cdot \vec{u}$, il existe $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{y} = \lambda_2 \cdot \vec{u}$.
 Donc

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} &= \lambda \cdot (\lambda_1 \cdot \vec{u}) + \lambda_2 \cdot \vec{u} \\ &= (\lambda \lambda_1) \cdot \vec{u} + \lambda_2 \cdot \vec{u} \\ &= (\lambda \lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

Donc $\lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R} \cdot \vec{u}$.

De ces trois points, on en déduit que $\mathbb{R} \cdot \vec{u}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 . □

En particulier, toute droite de \mathbb{R}^2 passant par $(0, 0)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .



- Soient a, b et c trois réels. Le plan \mathcal{P} de \mathbb{R}^3 d'équation $ax + by + cz = 0$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3 : \mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$.

Preuve —

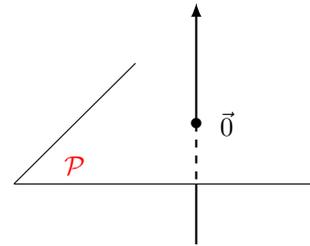
1. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$.
2. $\vec{0}_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in \mathcal{P}$ car $a \times 0 + b \times 0 + c \times 0 = 0$.
3. Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) des éléments de \mathcal{P} et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On sait que $ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$ et $ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$ car (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) appartiennent au plan \mathcal{P} .
Vérifions que $\lambda \cdot (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2) \in \mathcal{P}$.
On a

$$\begin{aligned} a(\lambda x_1 + x_2) + b(\lambda y_1 + y_2) + c(\lambda z_1 + z_2) &= a\lambda x_1 + ax_2 + b\lambda y_1 + by_2 + c\lambda z_1 + cz_2 \\ &= \lambda(ax_1 + by_1 + cz_1) + (ax_2 + by_2 + cz_2) \\ &= \lambda \times 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\lambda \cdot (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in \mathcal{P}$.

De ces trois points, il vient que \mathcal{P} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . □

En particulier, tout plan de \mathbb{R}^3 passant par $(0, 0, 0)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .



- $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

Preuve —

1. $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X]$.
2. $0 \in \mathbb{R}_n[X]$ car $\deg(0) = -\infty \leq n$.
3. Soient P et Q des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors $\lambda P + Q$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n car $\deg(\lambda P + Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\} \leq n$ puisque $\deg(P) \leq n$ et $\deg(Q) \leq n$. Donc $\lambda P + Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

De ces trois points, il vient que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. □

- Soit I un intervalle de \mathbb{R} . L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues de I dans \mathbb{R} est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Preuve —

1. $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
2. La fonction nulle $I \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto 0$ est continue donc appartient à $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.
3. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors, par somme et produit de fonctions continues, $\lambda f + g$ est une fonction continue de I dans \mathbb{R} , donc $\lambda f + g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

De ces trois points, il vient que $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. □

De même, les ensembles $\mathcal{D}(I, \mathbb{K}), \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}), \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

- L'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Preuve — F est un bien un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 qui contient le vecteur nul puisque $0 \times 0 = 0$. Mais $(1, 0, 0) \in F$ et $(0, 1, 0) \in F$ puisque $1 \times 0 = 0$ et $0 \times 1 = 0$, et $(1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0) \notin F$ puisque $1 \times 1 = 1 \neq 0$ donc F n'est pas stable par combinaison linéaire. Le point 3. de la caractérisation n'est donc pas vérifié. Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . □

PROPOSITION 28

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Alors l'intersection $\bigcap_{i \in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Preuve —

1. Pour tout $i \in I, E_i \subset E$ donc $\bigcap_{i \in I} E_i \subset E$.
2. Pour tout $i \in I, \vec{0}_E \in E_i$ car E_i est un sous-espace vectoriel de E . Donc $\vec{0}_E \in \bigcap_{i \in I} E_i$.

3. Soient \vec{x} et \vec{y} deux éléments de $\bigcap_{i \in I} E_i$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Soit $i_0 \in I$. Les vecteurs \vec{x} et \vec{y} appartiennent à E_{i_0} . E_{i_0} étant un sous-espace vectoriel de E , d'après la caractérisation, $\lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in E_{i_0}$.

i_0 étant quelconque, $\lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in \bigcap_{i \in I} E_i$.

De ces trois points, on a le résultat. □

⚡ La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel en général car il n'est pas stable par addition. Voyons sur un exemple.

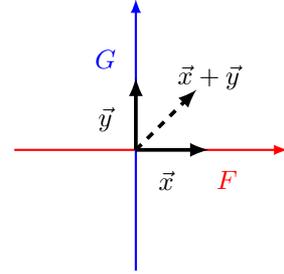
EXEMPLE 29 —

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Considérons F la droite vectorielle engendrée par $\vec{x} = (1, 0)$ et G la droite vectorielle engendrée par $\vec{y} = (0, 1)$.

On a $\vec{x} \in F$ donc $\vec{x} \in F \cup G$.

On a $\vec{y} \in G$ donc $\vec{y} \in F \cup G$.

Mais $\vec{x} + \vec{y} = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F \cup G$.



REMARQUE 30 — Le complémentaire $E \setminus F$ d'un sous-espace vectoriel F n'est pas un sous-espace vectoriel de E : $E \setminus F$ ne contient pas $\vec{0}_E$ puisque $\vec{0}_E \in F$.

PROPOSITION 31

Soit F un sous-espace vectoriel de E . Toute combinaison linéaire d'éléments $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ de F est élément de F .

Preuve — Ce résultat se démontre par récurrence en utilisant que F est stable par combinaison linéaire. □

1.2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

DÉFINITION 32

Soit X une partie de E . Le **sous-espace vectoriel engendré par X** est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X (au sens de l'inclusion). Il est noté $\text{Vect}(X)$.

Preuve — Justifions l'existence du plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X . E est un sous-espace vectoriel de E contenant X . Considérons alors l'intersection F de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant X . F est un sous-espace vectoriel de E comme intersection de sous-espaces vectoriels et F contient X puisque F est l'intersection de parties contenant X . Donc F est un sous-espace vectoriel de E contenant X .

Montrons que F est le plus petit au sens de l'inclusion. Soit H un sous-espace vectoriel de E contenant X . Alors par définition de F , $F \subset H$. Donc F est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X . □

REMARQUES 33

- Dans le cas d'un nombre fini de vecteurs avec $X = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$, $\text{Vect}(X)$ se note souvent $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ et on parle du sous-espace vectoriel engendré par la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.
- Plus généralement, si $X = \{\vec{x}_i \mid i \in I\}$, $\text{Vect}(X)$ se note souvent $\text{Vect}((\vec{x}_i)_{i \in I})$.

PROPOSITION 34

- Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille d'éléments de E . Alors $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$.
Autrement dit, $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$.
- Plus généralement, soient $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E indicée par I . Alors $\text{Vect}((\vec{x}_i)_{i \in I})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) de la famille $(\vec{x}_i)_{i \in I}$.

Preuve — Traitons le premier point, le deuxième se traite de la même manière.

Notons $C = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$, l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$. Montrons, par double inclusions que $C = \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.

▷ $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ contient les éléments $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$. Or $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est un sous-espace vectoriel de E . Donc $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ contient les combinaisons linéaires des éléments $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$. Donc $C \subset \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.

◁ Réciproquement, montrons que $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \subset C$. Pour cela, montrons que C est un sous-espace vectoriel contenant les éléments $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$.

1. On a $C \subset E$ puisque les \vec{x}_i sont éléments de E et E est un espace vectoriel.
2. $\vec{0}_E = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \vec{x}_i$ donc $\vec{0}_E \in C$.
3. Soient \vec{u} et \vec{v} des éléments de C et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda \cdot \vec{u} + \vec{v} \in C$.
 Comme $\vec{u} \in C$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i$.
 Comme $\vec{v} \in C$, il existe (μ_1, \dots, μ_n) telle que $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot \vec{x}_i$.
 Donc

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \vec{u} + \vec{v} &= \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i + \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot \vec{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda \lambda_i + \mu_i) \cdot \vec{x}_i. \end{aligned}$$

Donc $\lambda \cdot \vec{u} + \vec{v} \in C$.

De ces trois points, il vient que C est un sous-espace vectoriel de E .

De plus, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\vec{x}_j = 1 \cdot \vec{x}_j + \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ i \neq j}} 0 \cdot \vec{x}_i$ donc $\vec{x}_j \in C$. Donc C contient les éléments $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$.

Par définition, $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ étant le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les éléments x_i , on en déduit que $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \subset C$.

Finalement, $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = C$. □

REMARQUE 35 — Cela signifie que $\vec{x} \in \text{Vect}(X)$ si et seulement s'il existe $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ éléments de X et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ éléments de \mathbb{K} tels que

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n.$$

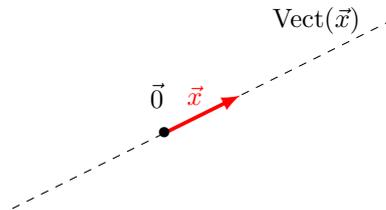
EXEMPLES 36

- Soit \vec{x} un élément de E . Alors

$$\text{Vect}(\vec{x}) = \{ \lambda \cdot \vec{x} \mid \lambda \in \mathbb{K} \}.$$

Si $\vec{x} = \vec{0}_E$ alors $\text{Vect}(\vec{x}) = \{ \vec{0}_E \}$

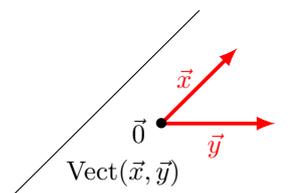
Si non, $\text{Vect}(\vec{x}) = \mathbb{K} \cdot \vec{x}$ est la **droite vectorielle engendrée par \vec{x}** .



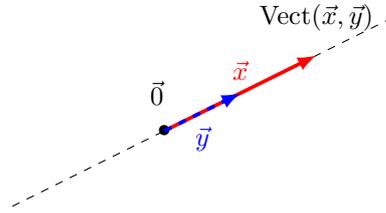
- Soient \vec{x} et \vec{y} deux éléments de E . Alors

$$\text{Vect}(\vec{x}, \vec{y}) = \{ \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \}.$$

Si \vec{x} et \vec{y} ne sont pas colinéaires, $\text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$ est le **plan vectoriel engendré par \vec{x} et \vec{y}** .



Si \vec{x} et \vec{y} sont **colinéaires** \共线 (c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{y} = \lambda \cdot \vec{x}$ ou $\vec{x} = \lambda \cdot \vec{y}$) avec $\vec{x} \neq \vec{0}_E$, $\text{Vect}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbb{K} \cdot \vec{x}$ est la droite vectorielle engendrée par \vec{x} .



EXEMPLES 37

- $\text{Vect}(\vec{0}_E) = \vec{0}_E$.
- Dans \mathbb{R}^2 , le sous-espace vectoriel $\text{Vect}((1, 1))$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $(1, 1)$ de \mathbb{R}^2 et passant par $(0, 0)$:

$$\text{Vect}((1, 1)) = \{\lambda(1, 1) \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \{(\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Dans \mathbb{R}^3 , considérons $\vec{x} = (1, 1, 0)$ et $\vec{y} = (-1, 0, 3)$. Le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$ est le plan vectoriel engendré par \vec{x} et \vec{y} :

$$\text{Vect}(\vec{x}, \vec{y}) = \{\lambda(1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 3) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\lambda - \mu, \lambda, 3\mu) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- On a $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^n)$ et $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}((X^n)_{n \in \mathbb{N}})$.
- Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} ,

$$\text{Vect}(1) = \{\lambda \times 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

et

$$\text{Vect}(1, i) = \{\lambda \times 1 + \mu \times i \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{C}.$$

- Dans le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C} ,

$$\text{Vect}(1) = \{\lambda \times 1 \mid \lambda \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}.$$

Pour démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de E , on peut montrer qu'il est engendré par une famille de vecteurs de E . C'est parfois pratique, comme sur les exemples suivants.

EXEMPLES 38

- Soit $F = \{(\lambda + \mu, \lambda - \mu) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. On a

$$F = \{\lambda(1, 1) + \mu(1, -1) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1), (1, -1)),$$

donc F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 , engendré par les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$.

- Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. On a

$$G = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Exprimons y en fonction de x et z . On a $(x, y, z) \in H$ si et seulement si $y = 2x + 3z$. Donc

$$H = \{(x, 2x + 3z, z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 2, 0) + z(0, 3, 1) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 2, 0), (0, 3, 1)).$$

Donc H est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , engendré par les vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(0, 3, 1)$.

PROPOSITION 39

Soient $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille d'éléments de E . On considère les opérations suivantes :

- éliminer les vecteurs nuls de la famille.
- éliminer un des vecteurs de la famille s'il est égal à un autre,
- permuter des vecteurs,
- multiplier un vecteur par un scalaire non nul,
- ajouter à l'un des vecteurs \vec{x}_{i_0} une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille :

$$\vec{x}_{i_0} + \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ i \neq i_0}} \lambda_i \cdot \vec{x}_i,$$

L'espace vectoriel engendré par la famille obtenue par ces opérations est encore égal à $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.

EXEMPLE 40 — (Reprenons l'ensemble F des exemples 38. On a vu que $F = \text{Vect}((1, 1), (1, -1))$.)

Par opérations sur la famille $((1, 1), (1, -1))$, on obtient

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}((1, 1), (1, -1) + (1, 1)) = \text{Vect}((1, 1), (2, 0)) \\ &= \text{Vect}((1, 1), \frac{1}{2}(2, 0)) = \text{Vect}((1, 1), (1, 0)) \\ &= \text{Vect}((1, 1) - (1, 0), (1, 0)) = \text{Vect}((0, 1), (1, 0)) \\ &= \{(\lambda, \mu) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

1.3 FAMILLES DE VECTEURS

Dans cette partie, $(E, +, \cdot)$ désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1.3.1 Familles génératrices

DÉFINITION 41

Soit $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que la famille $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ est **génératrice** si tout vecteur de E est combinaison linéaire de la famille $(\vec{x}_i)_{i \in I}$:

$$E = \text{Vect}((x_i)_{i \in I}).$$

Commençons par donner des exemples classiques de familles génératrices.

EXEMPLES 42

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
- La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$.
- La famille $((1, 0), (0, 1))$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^2 :
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$.
- La famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 :
Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$.
- Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$.
La famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille génératrice de \mathbb{K}^n :
Pour tout $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$.

- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$: pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- La famille $(1, i)$ est une famille génératrice du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} :
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z = \operatorname{Re}(z) \times 1 + \operatorname{Im}(z) \times i$.
- La famille (1) est une famille génératrice du \mathbb{K} -espace vectoriel \mathbb{K} :
Pour tout $x \in \mathbb{K}$, $x = x \times 1$.

Lorsqu'un ensemble est écrit comme un Vect, on connaît immédiatement une famille génératrice.

EXEMPLE 43 — Nous avons vu à l'exemple 40, par opérations élémentaires sur les Vect, que

$$\operatorname{Vect}((1, 1), (1, -1)) = \mathbb{R}^2.$$

La famille $((1, 1), (1, -1))$ est donc une famille génératrice de \mathbb{R}^2 .

On peut aussi montrer, par résolution d'un système par exemple, que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) = \frac{x+y}{2}(1, 1) + \frac{x-y}{2}(1, -1).$$

On retrouve alors le résultat.

En effet, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y) = \lambda_1(1, 1) + \lambda_2(1, -1)$, c'est-à-dire tels que $(x, y) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2)$. On doit donc résoudre le système $\begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_1 - \lambda_2 \end{cases}$.

On trouve alors $\lambda_1 = \frac{x+y}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{x-y}{2}$.

1.3.2 Familles libres et liées

DÉFINITION 44

- Soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ des éléments de E . On dit que la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est **libre** si par définition, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \vec{0}_E$ alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i = 0$.
On dit aussi que les vecteurs $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ sont **linéairement indépendants** \textit{线性无关}.
- Soit $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E . On dit que la famille $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est **libre** si toute sous-famille **finie** de $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ est libre.

PROPOSITION 45

Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille libre de E . Soit $\vec{x} \in \operatorname{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$. Alors les coefficients λ_i dans la décomposition $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i$ sont uniques :

Pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et tout $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$, si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot \vec{x}_i$ alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i = \mu_i$.

Preuve — Supposons que $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i$ et $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot \vec{x}_i$.

On a donc

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot \vec{x}_i,$$

soit

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) \cdot \vec{x}_i = \vec{0}_E.$$

Donc, la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ étant libre, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i - \mu_i = 0$, soit $\lambda_i = \mu_i$.

D'où le résultat. □

Cela nous autorise donc à identifier les coefficients dans les combinaisons linéaires (uniquement lorsque la famille est libre!).

DÉFINITION 46

Soit $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E . On dit que la famille $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ est **liée** si elle n'est pas libre.

Autrement dit, il existe $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ éléments de la famille $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \vec{0}_E \text{ et } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0).$$

On dit aussi que les vecteurs $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ sont **linéairement dépendants**.

PROPOSITION 47

Soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ des éléments de E . La famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ est combinaison linéaire des autres vecteurs.

Preuve — \triangleright Supposons que la $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ soit liée. Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \vec{0}_E$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$. Il existe donc $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On a donc

$$\lambda_{i_0} \cdot \vec{x}_{i_0} + \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ i \neq i_0}} \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \vec{0}_E.$$

Donc

$$\vec{x}_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \cdot \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ i \neq i_0}} \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ i \neq i_0}} \frac{-\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \cdot \vec{x}_i.$$

Donc \vec{x}_{i_0} est une combinaison linéaire des autres vecteurs.

\triangleleft Réciproquement, supposons que $\vec{x}_{i_0} = \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ i \neq i_0}} \lambda_i \cdot \vec{x}_i$. Alors on a $1 \cdot \vec{x}_{i_0} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq i_0}} (-\lambda_i) \cdot \vec{x}_i = \vec{0}_E$ et les λ_i sont non tous nuls puisque $\lambda_{i_0} = 1$. Donc la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est liée. □

La remarque suivante découle de la définition de deux vecteurs colinéaires.

REMARQUE 48 — Soient \vec{x} et \vec{y} des éléments de E . La famille (\vec{x}, \vec{y}) est liée si et seulement si \vec{x} et \vec{y} sont colinéaires.

Donnons des exemples classiques de familles libres.

EXEMPLES 49

- La famille $(1, i)$ est libre dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} .

Preuve — Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot i = 0$. Alors, par identification des parties réelles et imaginaires, $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. D'où la liberté de la famille $(1, i)$ dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . □

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$. La famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est libre dans \mathbb{K}^n .

Preuve — Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{e}_i = \vec{0}_{\mathbb{K}^n}$.

On a $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{e}_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\vec{0}_{\mathbb{K}^n} = (0, \dots, 0)$.

Donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ et donc, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i = 0$. □

- La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Preuve — Soit $(X^{d_1}, \dots, X^{d_p})$ une sous-famille finie de de $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $d_1 < d_2 < \dots < d_p$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\lambda_1 X^{d_1} + \dots + \lambda_p X^{d_p} = 0$. Alors par unicité des coefficients du polynôme nul, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$. Donc la famille $(X^{d_1}, \dots, X^{d_p})$ est libre.

Toute sous-famille finie de $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc libre, et donc la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre. □

- La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Preuve — La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une sous-famille finie de $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui, on vient de le voir, est libre. Par définition de la liberté d'une famille infinie, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est donc libre.

On peut aussi le démontrer en revenant à la définition pour une famille finie. □

- Une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés est libre.

Plus précisément, soit (P_1, \dots, P_n) une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$. Alors la famille (P_1, \dots, P_n) est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Preuve —

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0$.

Supposons par l'absurde que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$. Soit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ le plus grand indice tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Alors $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{i_0} P_{i_0}$ est de degré $\deg(P_{i_0}) \neq -\infty$ (car les degrés des polynômes sont échelonnés et $\lambda_{i_0} P_{i_0}$ est non nul) et n'est donc pas le polynôme nul. Or, par hypothèse, $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{i_0} P_{i_0} = 0$, ce qui est absurde.

Donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ et la famille (P_1, \dots, P_n) est libre. □

- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Preuve — Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \vec{0}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$$

Alors $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, 0, 0, 0)$. D'où le résultat. □

EXEMPLES 50

- La famille $(1, i)$ est liée dans le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C} .

Preuve — En prenant $\lambda = i$ et $\mu = 1$, on a $i \cdot 1 - 1 \times i = 0$ et $(\lambda, \mu) = (i, 1) \neq (0, 0)$. Donc la famille $(1, i)$ est liée dans le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C} . □

- La famille $((1, 2, 1), (-1, 3, 1), (-1, 13, 5))$ est liée dans \mathbb{R}^3 .

Preuve — Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda(1, 2, 1) + \mu(-1, 3, 1) + \nu(-1, 13, 5) = (0, 0, 0) \text{ si et seulement si } \begin{cases} \lambda - \mu - \nu = 0 \\ 2\lambda + 3\mu + 13\nu = 0 \\ \lambda + \mu + 5\nu = 0 \end{cases}.$$

Il existe des solutions non nulles à ce système, par exemple $(\lambda, \mu, \nu) = (2, 3, -1)$.

On a donc $2(1, 2, 1) + 3(-1, 3, 1) - (-1, 13, 5) = (0, 0, 0)$ et la famille $((1, 2, 1), (-1, 3, 1), (-1, 13, 5))$ est liée. □

PROPOSITION 51

1. Soit $\vec{x} \in E$. Alors (\vec{x}) est une famille libre si et seulement si $\vec{x} \neq \vec{0}_E$.
2. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
3. Toute famille contenant une famille liée est liée.
4. Toute famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ dont l'un des vecteurs \vec{x}_i est nul, est liée.
5. Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille libre de E . Soit $\vec{x} \in E$. La famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{x})$ est libre si et seulement si \vec{x} n'est pas combinaison linéaire de la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$. Autrement dit, $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{x})$ est libre si et seulement si $\vec{x} \notin \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.

Preuve —

1. \triangleleft Supposons $\vec{x} \neq \vec{0}_E$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$. Alors comme $\vec{x} \neq \vec{0}_E$, $\lambda = 0$. Donc la famille (\vec{x}) est libre.
 \triangleright Réciproquement, si $\vec{x} = \vec{0}_E$ alors $1 \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$, donc la famille (\vec{x}) est liée. Donc par contraposée, si (\vec{x}) est libre alors $\vec{x} \neq \vec{0}_E$.
2. Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille libre de E . Quitte à changer la numérotation, considérons la sous-famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ avec $p \leq n$. Si $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est une famille liée, alors l'un des vecteurs \vec{x}_{i_0} avec $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ est combinaison linéaire des autres et donc \vec{x}_{i_0} , vecteur de la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est combinaison linéaire des autres vecteurs \vec{x}_i , avec $i \in \{1, \dots, n\}$. Ceci contredit le fait que la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est libre.
3. Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille liée de E . Considérons la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p)$. La famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ étant liée, l'un des vecteurs \vec{x}_{i_0} est combinaison linéaire des autres vecteurs \vec{x}_i , donc *a fortiori* des vecteurs de la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p)$. Cette famille est donc liée.
4. Une famille contenant le vecteur $\vec{0}_E$ contient donc la famille $(\vec{0}_E)$ qui est liée, et est donc liée.
5. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$\lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n + \lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}_E.$$

Si $\lambda \neq 0$ alors $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \frac{-\lambda_i}{\lambda} \cdot \vec{x}_i$, ce qui contredit le fait que \vec{x} n'est pas combinaison linéaire des \vec{x}_i . Donc $\lambda = 0$. Donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \vec{0}_E$. La famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ étant libre, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i = 0$. Donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda) = (0, \dots, 0, 0)$. Donc la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{x})$ est libre. □

1.3.3 Bases

DÉFINITION 52

Soit $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que la famille $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ est une **base** de E si c'est une famille libre et génératrice.

PROPOSITION 53

Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de E . La famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est une base si et seulement si tout élément \vec{x} de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.

Autrement dit, il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i.$$

Les coefficients λ_i de cette combinaison linéaire sont appelés les **coordonnées** de \vec{x} dans la base $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.

Preuve — L'existence provient du caractère générateur et l'unicité du caractère libre. \square



Les bases sont des familles et non des ensembles !

Donnons des bases classiques à connaître. Nous avons déjà montré dans les parties précédentes que ces familles sont libres et génératrices, par définition, ce sont donc des bases.

EXEMPLES 54

- La famille $(1, i)$ est une base du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} .
Les coordonnées d'un élément $z \in \mathbb{C}$ dans la base $(1, i)$ sont $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$. La famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de \mathbb{K}^n , appelée la **base canonique** de \mathbb{K}^n .
Les coordonnées d'un élément $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ dans cette base canonique sont (x_1, \dots, x_n) .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée la **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.
Les coordonnées d'un polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base canonique sont (a_0, a_1, \dots, a_n) .
- La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}[X]$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, appelée la **base canonique** de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Les coordonnées d'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans cette base canonique sont (a, b, c, d) .

EXEMPLE 55 — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$. La famille $\left(1, X - a, \frac{(X - a)^2}{2!}, \dots, \frac{(X - a)^n}{n!} \right)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base sont $(P(a), P'(a), P''(a), \dots, P^{(n)}(a))$.

Preuve — Montrons que la famille $\left(1, X - a, \frac{(X - a)^2}{2!}, \dots, \frac{(X - a)^n}{n!} \right)$ est libre et génératrice.

- Il s'agit d'une famille de polynômes de degrés échelonnés donc cette famille est libre.
- Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. D'après la formule de Taylor polynomiale, on a $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a) \frac{(X - a)^k}{k!}$.

La famille de vecteurs $\left(1, X - a, \frac{(X - a)^2}{2!}, \dots, \frac{(X - a)^n}{n!} \right)$ est donc génératrice.

De ces deux points, il vient que la famille est une base et la décomposition précédente nous donne les coordonnées de P dans la base. \square

Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base, on doit déterminer la combinaison linéaire de ce vecteur dans la base. C'est souvent ce que l'on fait déjà pour montrer qu'une famille est génératrice.

EXEMPLE 56 — Nous avons vu à l'exemple 43 que la famille $((1, 1), (1, -1))$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^2 .

Montrons que c'est une famille libre.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda(1, 1) + \mu(1, -1) = (0, 0)$. Alors $(\lambda + \mu, \lambda - \mu) = (0, 0)$. Donc

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} .$$

Donc $\lambda = \mu = 0$. Donc la famille $((1, 1), (1, -1))$ est une famille libre de \mathbb{R}^2 .

La famille $((1, 1), (1, -1))$ est donc libre et génératrice, c'est donc une base de \mathbb{R}^2 .

De plus, on a vu que tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit

$$(x, y) = \frac{x+y}{2}(1, 1) + \frac{x-y}{2}(1, -1).$$

Les coordonnées d'un vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dans la base $((1, 1), (1, -1))$ sont donc $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$.

Remarquons que nous avons en fait montré, par résolution d'un système, que pour tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y) = \lambda(1, 1) + \mu(1, -1)$. D'après la proposition 53, on obtient alors directement que la famille $((1, 1), (1, -1))$ est une base de \mathbb{R}^2 .

Lorsque l'on cherche une base d'un ensemble, on peut commencer par chercher une famille génératrice en écrivant l'ensemble comme un Vect, puis on vérifie qu'il s'agit d'une famille libre.

EXEMPLE 57 — Reprenons l'ensemble $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$ des exemples 38 et déterminons une base de H .

- Nous avons vu que $H = \text{Vect}((1, 2, 0), (0, 3, 1))$. La famille $((1, 2, 0), (0, 3, 1))$ est donc une famille génératrice de H .
- Vérifions que cette famille est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda(1, 2, 0) + \mu(0, 3, 1) = (0, 0, 0)$.

$$\text{On a donc } \begin{cases} \lambda = 0 \\ 2\lambda + 3\mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} .$$

Donc $\lambda = \mu = 0$.

La famille $((1, 2, 0), (0, 3, 1))$ est donc libre.

- Conclusion : La famille $((1, 2, 0), (0, 3, 1))$ est donc une base de H .

1.4 ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

1.4.1 Définition

DÉFINITION 58

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que E est de **dimension finie** \有限维\ si E possède une famille génératrice finie. Sinon, on dit que E est de **dimension infinie** \无线维\.

EXEMPLES 59

- Les \mathbb{K} -espaces vectoriels \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont de dimension finie. En effet, leur base canonique est une famille génératrice finie.
- Le \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. En effet, aucune famille finie n'engendre $\mathbb{K}[X]$.

1.4.2 Existence de bases finies

Nous allons démontrer dans cette partie que tout espace vectoriel E de dimension finie admet au moins une base, puis dans la partie suivante que deux bases de E ont le même nombre d'éléments. Cela nous permettra de définir la dimension de E comme le nombre d'éléments d'une base quelconque de E .

THÉORÈME 60

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel tel que $E \neq \{\vec{0}_E\}$. Soit \mathcal{G} une famille génératrice finie de E . Soit \mathcal{L} une sous-famille de \mathcal{G} telle que \mathcal{L} est libre¹. Alors il existe une base finie \mathcal{B} de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Preuve — Soit $\mathcal{G} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille génératrice de E . Soit \mathcal{L} une famille libre contenue dans \mathcal{G} .

Si \mathcal{L} est génératrice alors c'est une base et on a le résultat.

Supposons donc que \mathcal{L} n'est pas génératrice. Quitte à changer la numérotation, supposons que $\mathcal{L} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ avec $p < n$.

- Alors il existe $\vec{x}_{i_1} \in \{\vec{x}_{p+1}, \dots, \vec{x}_n\}$ tel que la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, \vec{x}_{i_1})$ est libre.
En effet, sinon, chaque vecteur \vec{x}_i avec $i \in \{p+1, \dots, n\}$ serait combinaison linéaire des vecteurs \vec{x}_j avec $j \in \{1, \dots, p\}$ et alors chaque vecteur \vec{x} de E pourrait s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille \mathcal{L} . La famille \mathcal{L} serait donc génératrice, ce qui est absurde.
On peut donc compléter la famille \mathcal{L} par un vecteur $\vec{x}_{i_1} \in \{\vec{x}_{p+1}, \dots, \vec{x}_n\}$ et la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, \vec{x}_{i_1})$ est libre.
- Si cette famille est génératrice, c'est une base et on a le résultat. Sinon, on peut à nouveau trouver un vecteur \vec{x}_{i_2} appartenant à \mathcal{G} mais n'étant pas un vecteur de la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, \vec{x}_{i_1})$ et telle que la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, \vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2})$ soit libre.
- On construit ainsi de proche en proche une suite de familles libres $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots$, telles que

$$\mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \dots \subset \mathcal{G}.$$

Comme \mathcal{G} est une famille finie, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{L}_k est libre et génératrice. C'est donc une base de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_k \subset \mathcal{G}$. □

Nous pouvons en déduire directement les résultats suivants.

THÉORÈME 61

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie tel que $E \neq \{\vec{0}_E\}$.

- De toute famille génératrice finie, on peut extraire une base finie.
- Théorème de la base incomplète :
Toute famille libre peut être complétée en une base finie.
- E admet au moins une base finie.

Preuve —

- Soit \mathcal{G} une famille génératrice de E . Comme $E \neq \{\vec{0}_E\}$, la famille \mathcal{G} contient un vecteur non nul \vec{x} . La famille (\vec{x}) est donc libre. D'après le théorème précédent, il existe donc une base \mathcal{B} telle que $(\vec{x}) \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. La famille \mathcal{B} est donc une base de E , extraite de \mathcal{G} .
- Soit \mathcal{L} une famille libre de E . E étant de dimension finie, E admet une famille génératrice finie \mathcal{G} . La famille $\mathcal{G} \cup \mathcal{L}$ est génératrice car elle contient une famille génératrice.
D'après le théorème précédent, il existe donc une base \mathcal{B} telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G} \cup \mathcal{L}$. La famille \mathcal{L} est donc complétée en une famille \mathcal{B} , base de E .
- E étant un espace vectoriel de dimension finie, E admet une famille génératrice finie \mathcal{G} . D'après le premier point, on peut donc extraire de \mathcal{G} une base finie. E admet donc au moins une base finie. □

REMARQUE 62 — Plus précisément, nous avons démontré que toute famille libre peut être complétée en une base en choisissant les vecteurs dans n'importe quelle famille génératrice.

REMARQUE 63 — Dans le cas où $E = \{\vec{0}_E\}$, aucune famille de vecteurs de E n'est libre et E ne possède donc pas de base.

1. Il en existe, il suffit de prendre par exemple la famille constituée d'un vecteur non nul de \mathcal{G} , qui est une famille libre. Un tel vecteur existe car on a supposé $E \neq \{\vec{0}_E\}$.

1.4.3 Dimension

PROPOSITION 64

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie engendré par n éléments. Alors toute famille libre de E possède au plus n éléments.

Preuve — Soient $\mathcal{G} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille génératrice finie de E et $\mathcal{F} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ une famille de m vecteurs de E avec $m > n$. Montrons que \mathcal{F} est une famille liée.

- Si \mathcal{F} contient un vecteur nul alors \mathcal{F} est liée et la proposition est démontrée.
- Supposons donc que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $\vec{y}_i \neq \vec{0}_E$. La famille \mathcal{G} étant génératrice, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\vec{y}_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i$.

Comme $\vec{y}_1 \neq \vec{0}_E$, les λ_i sont non tous nuls. Quitte à réindicer, supposons que $\lambda_1 \neq 0$. Alors $\vec{x}_1 = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \vec{y}_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \cdot \vec{x}_i$.

On en déduit que tout élément \vec{x} de E s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{y}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. La famille $(\vec{y}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ est donc génératrice.

- Cette famille étant génératrice, il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\vec{y}_2 = \mu_1 \cdot \vec{y}_1 + \sum_{i=2}^n \mu_i \cdot \vec{x}_i$. Si, pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, $\mu_i = 0$ alors $\vec{y}_2 = \lambda_1 \cdot \vec{y}_1$ et la famille $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m)$ est liée, et la proposition est alors démontrée.

Sinon, quitte à réindicer, supposons que $\mu_2 \neq 0$. Alors $\vec{x}_2 = \frac{1}{\mu_2} \cdot \vec{y}_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \vec{y}_1 + \sum_{i=3}^n \frac{\mu_i}{\mu_2} \cdot \vec{x}_i$.

La famille $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_n)$ est donc génératrice.

Ainsi, on obtient à chaque étape une famille génératrice sous la forme $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_p, \vec{x}_{p+1}, \dots, \vec{x}_n)$, où $p \leq n$.

En particulier, pour $p = n$, la famille $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ est génératrice. On en déduit que \vec{y}_{n+1} s'écrit comme combinaison linéaire des \vec{y}_i avec $i \in \{1, \dots, n\}$.

La famille $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n, \vec{y}_{n+1})$ est donc liée. Toute famille contenant une famille liée étant liée, on en déduit que la famille $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ est liée.

- Finalement, toute famille contenant strictement plus de n vecteurs est liée. Une famille libre contient donc au maximum n vecteurs. □

Une famille constituée de n éléments est appelée **famille de cardinal n** .

THÉORÈME 65

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E sont finies et de même cardinal.

Preuve — Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E de cardinaux n et n' . Comme \mathcal{B} est génératrice et \mathcal{B}' est libre, d'après la proposition précédente, $n' \leq n$. De même, comme \mathcal{B}' est génératrice et \mathcal{B} est libre, $n \leq n'$. D'où $n = n'$. □

Nous pouvons maintenant définir la notion de dimension.

DÉFINITION 66

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal commun à toutes les bases de E est appelé **dimension** \ 维数 de E , et est noté $\dim(E)$ (ou $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ s'il y a ambiguïté sur le corps \mathbb{K}).

Par convention, si $E = \{\vec{0}_E\}$, alors $\dim(E) = 0$.

DÉFINITION 67

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- Si $\dim(E) = 1$, on dit que E est une **droite vectorielle**.
- Si $\dim(E) = 2$, on dit que E est un **plan vectoriel**.

Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel E , on trouve donc une base de E puis on compte le nombre d'éléments de cette base.

EXEMPLES 68 À partir des bases canoniques des espaces vectoriels suivants, on obtient leur dimension :

- $\dim \mathbb{K}^n = n$,
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$,
- $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$.
- $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$,
- $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$,
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

PROPOSITION 69

- Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

- Plus généralement, soient E_1, \dots, E_p des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \dim E_1 + \dots + \dim E_p.$$

Preuve —

- Soient $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ une base de E et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ une base de F . Montrons que la famille

$$\mathcal{B} = ((\vec{e}_1, \vec{0}_F), \dots, (\vec{e}_m, \vec{0}_F), (\vec{0}_E, \vec{f}_1), \dots, (\vec{0}_E, \vec{f}_n))$$

est une base de $E \times F$.

- Montrons que \mathcal{B} est une famille génératrice de $E \times F$. Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times F$. Comme $\vec{x} \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ tel que $\vec{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \vec{e}_i$. Comme $\vec{y} \in F$, il existe (μ_1, \dots, μ_n) tel que $\vec{y} = \sum_{j=1}^n \mu_j \cdot \vec{f}_j$. On a donc

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \vec{e}_i, \sum_{j=1}^n \mu_j \cdot \vec{f}_j \right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot (\vec{e}_i, \vec{0}_F) + \sum_{j=1}^n \mu_j \cdot (\vec{0}_E, \vec{f}_j).$$

Donc (\vec{x}, \vec{y}) s'écrit donc comme combinaison linéaire des éléments de \mathcal{B} .

- Montrons que \mathcal{B} est une famille libre. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot (\vec{e}_i, \vec{0}_F) + \sum_{j=1}^n \mu_j \cdot (\vec{0}_E, \vec{f}_j) = (\vec{0}_E, \vec{0}_F).$$

On a donc

$$\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \vec{e}_i, \sum_{j=1}^n \mu_j \cdot \vec{f}_j \right) = (\vec{0}_E, \vec{0}_F),$$

donc $\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \vec{e}_i = \vec{0}_E$ et $\sum_{j=1}^n \mu_j \cdot \vec{f}_j = \vec{0}_F$.

Comme $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ est une base de E , pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda_i = 0$. Comme $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ est une base de F , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mu_j = 0$. Donc \mathcal{B} est une famille libre.

De ces deux points, on en déduit que \mathcal{B} est une base de $E \times F$. Cette base est constituée de $m + n$ éléments avec $m = \dim E$ et $n = \dim F$. Donc $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

- On peut le démontrer par récurrence par exemple.

□

1.4.4 Caractérisation des bases en dimension finie

Les résultats de cette partie sont importants et seront beaucoup utilisés en pratique.

PROPOSITION 70

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

- Toute famille libre possède au plus n éléments.
- Toute famille génératrice possède au moins n éléments.

Preuve — Soit \mathcal{B} une base de E . Alors, par définition de la dimension, \mathcal{B} est de cardinal n .

- La famille \mathcal{B} étant une famille génératrice à n éléments, d'après la proposition 64, une famille libre possède au plus n éléments.
- Soit \mathcal{G} une famille génératrice à m éléments. La famille \mathcal{B} étant une famille libre à n éléments, d'après la proposition 64, $n \leq m$. Donc \mathcal{G} possède au moins n éléments.

□

THÉORÈME 71

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

- Toute famille libre ayant n éléments est une base.
- Toute famille génératrice ayant n éléments est une base.

Preuve —

- Soit \mathcal{L} une famille libre à n éléments. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter \mathcal{L} en une base. Par définition de la dimension, on obtient alors une famille à n éléments. On n'a donc ajouté aucun élément à \mathcal{L} pour obtenir une base. \mathcal{L} était donc une base.
- Soit \mathcal{G} est une famille génératrice à n éléments. De la même manière, on peut extraire de \mathcal{G} une base, composée de n vecteurs. C'est donc que l'on n'a retiré aucun vecteur à \mathcal{G} pour obtenir une base. Donc \mathcal{G} est une base.

□

COROLLAIRE 72

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille constituée d'exactly n vecteurs. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est une base,
- $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est une famille libre,
- $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est une famille génératrice.

⚡ Pour dire qu'une famille libre/génératrice est une base, il faut bien vérifier qu'elle a le même nombre de vecteurs que la dimension de E .

EXEMPLES 73

- La famille $((1, 2, 0), (0, 1, 2), (2, 0, 1))$ est une base de \mathbb{R}^3 .
En effet, on vérifie que c'est une famille libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(2, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

$$\text{Alors } \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} .$$

Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Donc la famille $((1, 2, 0), (0, 1, 2), (2, 0, 1))$ est une famille libre, constituée de trois éléments dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 de dimension 3. La famille $((1, 2, 0), (0, 1, 2), (2, 0, 1))$ est donc une base de \mathbb{R}^3 .

- Nous avons vu que $\text{Vect}((1, 1), (1, -1)) = \mathbb{R}^2$. La famille $((1, 1), (1, -1))$ est donc une famille génératrice de \mathbb{R}^2 , constituée de deux éléments dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 de dimension 2. La famille $((1, 1), (1, -1))$ est donc une base de \mathbb{R}^2 .

Il est donc inutile ici de montrer que cette famille est libre (comme nous l'avons fait dans une partie précédente) pour obtenir le fait que c'est une base.

- La famille $(1, X - 2, X^2 + X + 1, 2X^3 - 2)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
En effet, il s'agit d'une famille de polynômes de degrés échelonnés, c'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$. Cette famille est constituée de 4 éléments dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ de dimension 4. La famille $(1, X - 2, X^2 + X + 1, 2X^3 - 2)$ est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Résumons.

MÉTHODE 74 — Il y a quatre manières de montrer qu'une famille \mathcal{B} de vecteurs est une base d'un espace vectoriel E de dimension finie :

- On montre que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de vecteurs de la famille \mathcal{B} .
- On montre que la famille \mathcal{B} est une famille libre et génératrice de E .
- On montre que la famille \mathcal{B} est une famille libre et on vérifie que $\dim(E) = \text{card}(\mathcal{B})$.
- On montre que la famille \mathcal{B} est génératrice de E et on vérifie que $\dim(E) = \text{card}(\mathcal{B})$.

Si l'on connaît la dimension de E , les deux dernières méthodes sont souvent plus rapides.

1.4.5 Dimension d'un sous-espace vectoriel

PROPOSITION 75

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors F est de dimension finie et

- $\dim F \leq \dim E$,
- $\dim F = \dim E$ si et seulement si $E = F$.

Preuve —

- Si $F = \{\vec{0}_E\}$, on a le résultat.
Supposons $F \neq \{\vec{0}_E\}$. Notons n la dimension de E . Soit N l'ensemble des cardinaux des familles libres de F . Toute famille libre de F est une famille libre de E donc contient au plus n éléments. N est donc majoré par n . N étant une partie non vide de \mathbb{N} , N admet un maximum p avec $p \leq n$.
Soit $\mathcal{L} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ une famille libre de F à p éléments. Montrons que \mathcal{L} est une base de F .
Soit $\vec{x} \in F$. Comme F n'admet pas de famille libre à plus de p éléments, la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, \vec{x})$ est liée. Donc \vec{x} est combinaison linéaire des vecteurs \vec{x}_i . \mathcal{L} est donc une famille génératrice de F .
Donc \mathcal{L} est une base de F et F est de dimension finie $p \leq n = \dim E$.
- Supposons que $\dim E = \dim F$. En reprenant la démonstration du point précédent, \mathcal{L} est une famille libre de F donc de E constituée de $n = \dim E$ éléments. C'est donc une base de E . \mathcal{L} étant génératrice, on a $E = \text{Vect}(\mathcal{L}) = F$. □

DÉFINITION 76

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . Un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$ est appelé un **hyperplan**.

EXEMPLES 77

- Nous avons vu à l'exemple 38 que l'ensemble $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ce vecteur étant non nul, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre et génératrice, c'est donc une base de G . Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 1. C'est une droite vectorielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Nous avons vu à l'exemple 57 qu'une base de l'ensemble $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$ est la famille $((1, 2, 0), (0, 3, 1))$. Donc H est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 de dimension 2. C'est un plan vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- Posons $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, 0)$. Déterminons la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , $V = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Par opérations sur les Vect, on a

$$\begin{aligned} V &= \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \\ &= \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}, \vec{w}) \\ &= \text{Vect}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{w}) \\ &= \text{Vect}(\vec{u}, \vec{w}). \end{aligned}$$

La famille (\vec{u}, \vec{w}) est donc une famille génératrice de V .

Les vecteurs \vec{u} et \vec{w} ne sont pas colinéaires, donc la famille (\vec{u}, \vec{w}) est libre.

Libre et génératrice, (\vec{u}, \vec{w}) est donc une base de V et V est de dimension 2.

Le résultat suivant propose une méthode pour montrer l'égalité de deux espaces vectoriels.

PROPOSITION 78

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.

Preuve — Posons $p = \dim(F)$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ une base de F . Alors \mathcal{B} est une famille libre dans F , donc dans G . \mathcal{B} est donc une famille libre constituée de p éléments dans un espace vectoriel G de dimension p . \mathcal{B} est donc une base de G . Donc $G = \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) = F$. □

1.4.6 Rang d'une famille de vecteurs

DÉFINITION 79

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ des éléments de E . On appelle **rang** de la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$, noté $\text{rg}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$, la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs :

$$\text{rg}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \dim(\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)).$$

Le rang d'une famille de vecteurs est le plus grand nombre de vecteurs linéairement indépendants qu'elle contient.

EXEMPLES 80

- En reprenant le troisième point de l'exemple 77, on obtient que $\text{rg}((1, 0, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 0)) = 2$.
- $\text{rg}(1, X, X^2, X^3) = 4$
- $\text{rg}(X, 2X, 4X) = 1$.

PROPOSITION 81

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension quelconque. Soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$ des éléments de E . On a

$$\text{rg}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \leq p,$$

avec égalité si et seulement si la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est libre.

Preuve — $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est un espace vectoriel engendré par la famille finie $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$, il est donc de dimension finie, inférieure à p , nombre d'éléments de cette famille génératrice. Donc

$$\text{rg}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) = \dim(\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)) \leq p.$$

En dimension p , une famille de p vecteurs est libre si et seulement si elle est génératrice. □

PROPOSITION 82

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . Soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$ des éléments de E . On a

$$\text{rg}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \leq n,$$

avec égalité si et seulement si la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est génératrice de E .

Preuve — $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $\dim(\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)) \leq \dim(E) = n$, avec égalité si et seulement si $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) = E$, c'est-à-dire si et seulement si la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est génératrice. □

COROLLAIRE 83

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . Soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$ des éléments de E . La famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est une base de E si et seulement si

$$\text{rg}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) = n.$$

1.4.7 Matrice d'une famille de vecteurs

DÉFINITION 84

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E . Soit $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ une famille de vecteurs de E . Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, on note $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$ les coordonnées de \vec{x}_j dans la base \mathcal{B} .

La matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots p}}$, notée $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est appelée **matrice de \mathcal{F} dans la base \mathcal{B}** .

REMARQUE 85 — Soit $\vec{x} \in E$ et soit \mathcal{B} une base de E . Alors $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x})$ est la colonne des coordonnées de \vec{x} dans la base \mathcal{B} .

EXEMPLES 86

- Dans la base canonique \mathcal{B}_c de \mathbb{R}^4 ,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_c}((1, 0, -1, 2), (2, 1, 0, 1), (-1, 0, 0, 1)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Dans la base canonique \mathcal{B}_c de $\mathbb{R}_2[X]$,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_c}(1 + X, X + 2X^2, -1 - X + X^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5 SOMME DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

Dans cette partie, E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1.5.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

DÉFINITION 87

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On appelle **somme de F et G** \text{线性空间 } F \text{ 与 } G \text{ 的和} \text{ l'ensemble

$$F + G = \{\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in F \text{ et } \vec{y} \in G\} = \{\vec{u} \in E \mid \exists (\vec{x}, \vec{y}) \in F \times G, \vec{u} = \vec{x} + \vec{y}\}.$$

PROPOSITION 88

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . La somme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E . De plus, $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G .

Preuve — Vérifions la caractérisation d'un sous-espace vectoriel.

- E est stable par combinaisons linéaires donc, pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in F \times G$, $\vec{x} + \vec{y} \in E$. Donc $F + G \subset E$.
- Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , $\vec{0}_E \in F$ et $\vec{0}_E \in G$. On a donc $\vec{0}_E = \vec{0}_E + \vec{0}_E \in F + G$.
- Soient $(\vec{u}, \vec{v}) \in (F + G)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Il existe $(\vec{x}_1, \vec{y}_1) \in F \times G$ et $(\vec{x}_2, \vec{y}_2) \in F \times G$ tels que $\vec{u} = \vec{x}_1 + \vec{y}_1$ et $\vec{v} = \vec{x}_2 + \vec{y}_2$. Alors $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{x}_1 + \mu \cdot \vec{x}_2 + \lambda \cdot \vec{y}_1 + \mu \cdot \vec{y}_2 = (\lambda \cdot \vec{x}_1 + \mu \cdot \vec{x}_2) + (\lambda \cdot \vec{y}_1 + \mu \cdot \vec{y}_2) \in F + G$ puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .

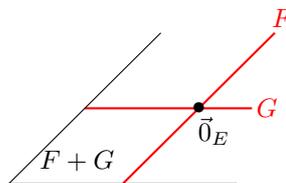
Donc $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E ;

On a $F \subset F + G$ car pour tout $\vec{x} \in F$, $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0}_E$ et $\vec{0}_E \in G$. De même, $G \subset F + G$. Donc $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E contenant F et G .

Soit H un sous-espace vectoriel de E contenant F et G . Alors, pour tout $\vec{x} \in F$ et tout $\vec{y} \in G$, $\vec{x} + \vec{y} \in H$ car $\vec{x} \in H$ et $\vec{y} \in H$ et H est stable par combinaisons linéaires. Donc $F + G \subset H$. □

Ainsi, tout sous-espace vectoriel de E contenant F et G contient aussi $F + G$.

⚠ Ne pas confondre la somme avec l'union ! L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.



EXEMPLES 89

- $\mathbb{R} + i\mathbb{R} = \mathbb{C}$. En effet, $\mathbb{R} + i\mathbb{R} = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
- Les droites vectorielles $\text{Vect}((1, 0, 0))$ et $\text{Vect}((0, 1, 0))$ ont pour somme le plan $z = 0$. En effet, $\text{Vect}((1, 0, 0)) + \text{Vect}((0, 1, 0)) = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} + \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

REMARQUE 90 — Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On vérifie facilement les propriétés suivantes :

- $F + G = G + F$,
- $F + E = E$,
- $F + \{\vec{0}_E\} = F$,
- $F + F = F$.

THÉORÈME 91 (Formule de Grassmann)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . Alors $F + G$ est de dimension finie et

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Preuve — Posons $p = \dim(F)$, $q = \dim(G)$ et $r = \dim(F \cap G)$. Puisque $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F et de G , $r \leq p$ et $r \leq q$. Considérons une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r)$ de $F \cap G$.

Puisque la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r)$ est une famille libre de F , on peut la compléter en une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r, \vec{x}_{r+1}, \vec{x}_p)$ de F . De même, on peut la compléter en une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r, \vec{y}_{r+1}, \dots, \vec{y}_q)$ de G .

Or tout vecteur \vec{u} de $F + G$ s'écrit comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G , donc est de la forme

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_r \vec{e}_r + \lambda_{r+1} \vec{x}_{r+1} + \dots + \lambda_p \vec{x}_p \\ &\quad + \mu_1 \vec{e}_1 + \dots + \mu_r \vec{e}_r + \mu_{r+1} \vec{y}_{r+1} + \dots + \mu_q \vec{y}_q, \end{aligned}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q$ sont des éléments de \mathbb{K} , soit, en posant, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $\nu_i = \lambda_i + \mu_i$,

$$\vec{u} = \nu_1 \vec{e}_1 + \dots + \nu_r \vec{e}_r + \lambda_{r+1} \vec{x}_{r+1} + \dots + \lambda_p \vec{x}_p + \mu_{r+1} \vec{y}_{r+1} + \dots + \mu_q \vec{y}_q.$$

La famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r, \vec{x}_{r+1}, \dots, \vec{x}_p, \vec{y}_{r+1}, \dots, \vec{y}_q)$ est donc une famille génératrice de $F + G$.

Montrons que cette famille est libre.

Soient $\nu_1, \dots, \nu_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_p, \mu_{r+1}, \dots, \mu_q$ des éléments de \mathbb{K} tels que

$$\underbrace{\nu_1 \vec{e}_1 + \dots + \nu_r \vec{e}_r}_{\vec{u} \in F \cap G} + \underbrace{\lambda_{r+1} \vec{x}_{r+1} + \dots + \lambda_p \vec{x}_p}_{\vec{v} \in F} + \underbrace{\mu_{r+1} \vec{y}_{r+1} + \dots + \mu_q \vec{y}_q}_{\vec{w} \in G} = \vec{0}_E.$$

On a $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}_E$, donc $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{v} \in F$ puisque \vec{u} et \vec{v} sont éléments de F . Donc $\vec{w} \in F \cap G$. Donc \vec{w} s'écrit comme combinaison linéaire des \vec{e}_i , ce qui donne :

$$\mu_{r+1} \vec{y}_{r+1} + \dots + \mu_q \vec{y}_q = \rho_1 \vec{e}_1 + \dots + \rho_r \vec{e}_r,$$

où $(\nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{K}^r$.

La famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r, \vec{y}_{r+1}, \dots, \vec{y}_q)$ étant libre, on en déduit que pour tout $i \in \{r+1, \dots, q\}$, $\mu_i = 0$.

De même, on obtient que pour tout $i \in \{r+1, \dots, p\}$, $\lambda_i = 0$.

On en déduit donc que $\nu_1 \vec{e}_1 + \dots + \nu_r \vec{e}_r = \vec{0}_E$. La famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r)$ étant libre, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $\nu_i = 0$.

La famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r, \vec{x}_{r+1}, \dots, \vec{x}_p, \vec{y}_{r+1}, \dots, \vec{y}_q)$ est donc libre. Libre et génératrice, c'est donc une base de $F + G$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \dim(F + G) &= r + (p - r) + (q - r) = p + q - r \\ &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G). \end{aligned}$$

□

1.5.2 Somme directe

DÉFINITION 92

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que la somme $F + G$ est **directe** (直和), et on note $F \oplus G$, si tout élément \vec{u} de $F + G$ s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$ avec $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$.

Autrement dit, pour tout $\vec{u} \in F + G$, si $\vec{u} = \vec{x}_1 + \vec{y}_1$ et $\vec{u} = \vec{x}_2 + \vec{y}_2$ avec $(\vec{x}_1, \vec{y}_1) \in F \times G$ et $(\vec{x}_2, \vec{y}_2) \in F \times G$, alors $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ et $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$.

REMARQUE 93 — La seule différence entre $F + G$ et $F \oplus G$ est que le symbole \oplus précise l'unicité de la décomposition.

La proposition suivante est très utilisée pour montrer qu'une somme est directe.

PROPOSITION 94

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . La somme $F + G$ est directe si et seulement si

$$F \cap G = \{\vec{0}_E\}.$$

Preuve — \triangleright Supposons que la somme $F + G$ soit directe. Soit $\vec{u} \in F \cap G$. Alors $\vec{u} = \underbrace{\vec{u}}_{\in F} + \underbrace{\vec{0}_E}_{\in G} = \underbrace{\vec{0}_E}_{\in F} + \underbrace{\vec{u}}_{\in G}$. Donc par unicité de la décomposition, $\vec{u} = \vec{0}_E$. Donc $F \cap G \subset \{\vec{0}_E\}$. Comme $\vec{0}_E \in F$ et $\vec{0}_E \in G$, $\{\vec{0}_E\} \subset F \cap G$.

Donc $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.

\triangleleft Réciproquement, supposons que $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$. Soit $\vec{u} \in F + G$. Supposons que $\vec{u} = \vec{x}_1 + \vec{y}_1$ et $\vec{u} = \vec{x}_2 + \vec{y}_2$. On a alors $\vec{x}_1 + \vec{y}_1 = \vec{x}_2 + \vec{y}_2$, donc $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{y}_2 - \vec{y}_1$. Notons \vec{v} cet élément. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , $\vec{v} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in F$ et $\vec{v} = \vec{y}_2 - \vec{y}_1 \in G$. Donc $\vec{v} \in F \cap G$. Comme $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$, $\vec{v} = \vec{0}_E$, et donc $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ et $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$.

Donc F et G sont en somme directe.

D'où le résultat. □

EXEMPLE 95 — Dans \mathbb{R}^3 , $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$ sont des sous-espaces vectoriels en somme directe.

En effet, F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 puisque $F = \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ et $G = \text{Vect}(1, 1, 1)$.

Montrons qu'ils sont en somme directe. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Alors $x + y + z = 0$ et $x = y = z$. Donc $x = y = z = 0$. Donc $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Donc $F \cap G \subset \{(0, 0, 0)\}$ et trivialement, $\{(0, 0, 0)\} \subset F \cap G$. Donc $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$. De la proposition précédente, on en déduit que F et G sont en somme directe.

PROPOSITION 96

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . Alors F et G sont en somme directe si et seulement si

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Preuve — D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$$

si et seulement si $\dim(F \cap G) = 0$, soit si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$, soit finalement si et seulement si F et G sont en somme directe. □

1.5.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

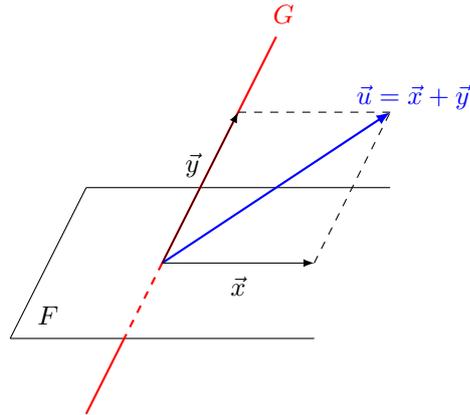
DÉFINITION 97

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont **supplémentaires dans E** \(\two\ 两个子空间 F 和 G 互为 E 的补空间\) (ou que F est un supplémentaire de G dans E) si E est la somme directe de F et G , c'est-à-dire :

1. La somme de F et G est directe : $F + G = F \oplus G$,
2. La somme de F et G vaut E : $E = F + G$.

On note alors $E = F \oplus G$.

⚡ Il faut bien distinguer les notions de « F et G sont en somme directe » et « E est la somme directe de F et G » (c'est-à-dire que la somme $F + G$ "remplit" E tout entier).



PROPOSITION 98

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément \vec{u} de E s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$ avec $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$.

Preuve — Cela découle de la définition d'une somme directe et du fait que $E = F + G$. □

PROPOSITION 99

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si

1. $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$,
2. $E = F + G$.

Preuve — Cela découle immédiatement de la proposition 94. □

EXEMPLE 100 — E et $\{\vec{0}_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

⚠ Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire : un supplémentaire est un sous-espace vectoriel et n'est pas nécessairement unique, le complémentaire n'est pas un sous-espace vectoriel et il est unique.

PROPOSITION 101

On suppose ici E de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Soient $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ une base de F et $\mathcal{B}_2 = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_q)$ une base de G . Alors $E = F \oplus G$ si et seulement si la famille $\mathcal{B} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_q)$, concaténée des bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 , est une base de E .

Preuve — \triangleright Supposons que $E = F \oplus G$. Alors tout élément \vec{u} de E se décompose de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G , et donc comme combinaison linéaire de la famille \mathcal{B} . Donc \mathcal{B} est une base.

\triangleleft Réciproquement, supposons que \mathcal{B} est une base de E . Alors tout élément \vec{u} de E s'écrit de manière unique sous la forme

$$\vec{u} = \underbrace{\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p}_{\in F} + \underbrace{\mu_1 \vec{y}_1 + \dots + \mu_q \vec{y}_q}_{\in G},$$

et donc de manière unique sous la forme $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$ avec $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$. Donc $E = F \oplus G$.

D'où le résultat. □

EXEMPLES 102

- Deux droites non confondues passant par $(0, 0)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^2 .
En effet, en notant $\mathcal{D}_1 = \text{Vect}(\vec{u})$ et $\mathcal{D}_2 = \text{Vect}(\vec{v})$, la famille (\vec{u}, \vec{v}) est libre puisque les vecteurs ne sont pas colinéaires. Formée de deux vecteurs, cette famille est donc une base de \mathbb{R}^2 . Donc $\mathbb{R}^2 = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$.
- Si \mathcal{P} est un plan passant par $(0, 0, 0)$ et \mathcal{D} est une droite non contenue dans le plan et passant par $(0, 0, 0)$ alors \mathcal{P} et \mathcal{D} sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
En effet, en notant $\mathcal{P} = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{w})$, la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3 .

- L'ensemble des fonctions paires \mathcal{P} et l'ensemble des fonctions impaires \mathcal{I} sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En effet, \mathcal{P} et \mathcal{I} sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (à vérifier).

1. Montrons que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}\}$. Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ car f est paire, et $f(-x) = -f(x)$ car f est impaire. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(x)$, donc $f(x) = 0$. Donc f est la fonction nulle. Donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} \subset \{0_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}\}$ et l'inclusion $\{0_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}\} \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ est évidente. Ainsi, $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}\}$ et donc \mathcal{P} et \mathcal{I} sont en somme directe.

2. Montrons que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} + \mathcal{I}$. On a $\mathcal{P} + \mathcal{I} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

et $x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ est une fonction paire et $x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ est une fonction impaire.

Donc $f \in \mathcal{P} + \mathcal{I}$. Donc $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{P} + \mathcal{I}$ et l'inclusion $\mathcal{P} + \mathcal{I} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Finalement $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} + \mathcal{I}$.

D'où $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, considérons $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ et $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Alors $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = A \oplus B$.

En effet, A et B sont des sous-espaces vectoriels de E puisque $A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ et

$$B = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

1. Montrons que $A \cap B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Soit $M \in A \cap B$. Alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et il existe $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Par identification des coefficients, on en déduit que $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = 0$. Donc $M = 0_2$. Donc $A \cap B \subset \{0_2\}$, puis $A \cap B = \{0_2\}$ (l'autre inclusion est évidente).

2. Pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A + B$.

Donc $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \subset A + B$, puis $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = A + B$ (l'autre inclusion est évidente).

D'où $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = A \oplus B$.