Feuille de TD n° 6

Raisonnements classiques

2 avril 2021

Exercice 1 (Disjonction de cas)**.**

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 4 divise n^2 ou 4 divise $n^2 - 1$.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

---

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Distinguons les cas selon que n est pair ou impair.
   • 1^{er} cas : n est pair. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Donc $n^2 = 4k^2$ et 4 divise n^2.
   • 2^{nd} cas : n est impair. Alors il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k' + 1$. Donc $n^2 = 4k'^2 + 4k' + 1$ puis $n^2 - 1 = 4(k'^2 + k')$ et $k'^2 + k' \in \mathbb{N}$. Donc 4 divise $n^2 - 1$.
   • Donc, dans tous les cas, 4 divise n^2 ou 4 divise $n^2 - 1$.
   D'où le résultat.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   • 1^{er} cas : $x \geq 1$. Alors $x - 1 \geq 0$, donc $|x-1| = x - 1$.
   On a donc
   $$\begin{aligned} x^2 - x + 1 - |x-1| &= x^2 - x + 1 - (x-1) \\ &= x^2 - 2x + 2 \\ &= (x-1)^2 + 1 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$
   Donc $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.
   • 2^{nd} cas : $x < 1$. Alors $x - 1 < 0$, donc $|x-1| = -(x-1) = -x + 1$.
   On a donc
   $$\begin{aligned} x^2 - x + 1 - |x-1| &= x^2 - x + 1 + (x-1) \\ &= x^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$
   Donc $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.
   • Donc, dans tous les cas, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.
   D'où le résultat.

Exercice 2. Démontrer par contraposée les propositions suivantes :

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $x \neq y$ alors $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
2. Soit x un réel. Si, pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$, alors $x = 0$.

---

1. Montrons, par contraposée, que si $x \neq y$ alors $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
   Supposons que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$.
   Alors $xy - x + y + 1 = xy + x - y + 1$, donc $-x + y = x - y$, soit $2x = 2y$. Donc finalement, $x = y$.
   Donc par contraposée, si $x \neq y$ alors $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
2. Montrons, par contraposée, que si pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$ alors $x = 0$.
   Supposons que $x \neq 0$. Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x| \geq \varepsilon$.
   Prenons $\varepsilon = \dfrac{|x|}{2}$. Alors $\varepsilon > 0$ et $|x| \geq \dfrac{|x|}{2} = \varepsilon$.
   Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $|x| \geq \varepsilon$.
   Donc, par contraposée, si pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| \leq \varepsilon$ alors $x = 0$.

Exercice 3. Démontrer par l'absurde que si n est le carré d'un nombre entier non nul alors $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier.

Soit n un nombre entier tel que n est le carré d'un nombre entier non nul. Supposons par l'absurde que $2n$ est le carré d'un nombre entier.

Comme n est le carré d'un nombre entier non nul, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = k^2$. Comme $2n$ est le carré d'un nombre entier, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $2n = p^3$.

On a donc $2k^2 = p^2$ et k est non nul. Donc $2 = \dfrac{p^2}{k^2}$. On en déduit que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{k}$, ce qui est absurde car $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Donc $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier.

D'où le résultat.

Exercice 4. Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est un multiple de 3.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.
5. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le suite définie par $v_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$.
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 3n$.

---

1. Démontrons le résultat par une récurrence simple. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ la propriété
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
   - Initialisation : Pour $n = 1$, on a $1^2 = 1 = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6}$.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$:
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

   On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$.
   Donc, d'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$,
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$
   D'où $P(n+1)$.

   Par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Démontrons le résultat par une récurrence simple. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ la propriété « $4^n + 5$ est un multiple de 3 ».
   • Initialisation : Pour $n = 0$, $4^0 + 5 = 6 = 2 \times 3$, donc $4^0 + 5$ est un multiple de 6. D'où $P(0)$.
   • Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$.
   Par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n + 5 = 3k$, donc $4^n = 3k - 5$.
   On a donc
   $$\begin{aligned} 4^{n+1} + 5 &= 4 \times 4^n + 5 \\ &= 4 \times (3k - 5) + 5 \\ &= 4 \times 3k - 15 \\ &= 3(4k - 5). \end{aligned}$$
   Donc $4^{n+1} + 5$ est un multiple de 3.
   D'où $P(n+1)$.
   Par récurrence, on en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est un multiple de 3.
3. Démontrons le résultat par une récurrence simple. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ la propriété « $(1+x)^n \geq 1 + nx$ ».
   • Initialisation : Pour $n = 0$, $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0 \times x$. D'où $P(0)$.
   • Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$.
   On a $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \times (1+x)$.
   Donc, d'après l'hypothèse de récurrence,
   $$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1 + x + nx + nx^2 \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x \end{aligned}$$
   car $nx^2 \geq 0$.
   D'où $P(n+1)$.
   Par récurrence, on a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
4. Démontrons le résultat par une récurrence double. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ la propriété « $u_n = 3^n - 2^n$ »
   • Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 0 = 3^0 - 2^0$, d'où $P(0)$. Pour $n = 1$, $u_1 = 1 = 3^1 - 2^1$, d'où $P(1)$.
   • Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$, montrons $P(n+2)$.
   On a $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$, donc par hypothèses de récurrence,
   $$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5(3^{n+1} - 2^{n+1}) - 6(3^n - 2^n) \\ &= 5 \times 3^{n+1} - 5 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} + 3 \times 2^{n+1} \\ &= 3^{n+1}(5-2) - 2^{n+1}(5-3) \\ &= 3^{n+2} - 2^{n+2}. \end{aligned}$$
   D'où $P(n+2)$.
   Par récurrence, on a donc démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.
5. Démontrons le résultat par une récurrence forte. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ la propriété $v_n = 3n$.
   • Initialisation : Pour $n = 1$, $v_1 = 3 = 3 \times 1$. D'où $P(1)$.
   • Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, supposons $P(k)$. Montrons $P(k+1)$.
   On a $v_{n+1} = \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$. Donc par hypothèses de récurrence,
   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} 3k \\ &= \frac{6}{n} \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{6}{n} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 3(n+1). \end{aligned}$$
   D'où $P(n+1)$.
   Par récurrence, on en déduit donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 3n$.

Exercice 5. Démontrer par analyse-synthèse les propositions suivantes :

1. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit, de façon unique, comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
   Autrement dit, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe une unique fonction paire $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = g + h$.

2. Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

---

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Raisonnons par analyse-synthèse.
   • Analyse : Supposons qu'il existe une fonction paire $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et une fonction impaire $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = g + h$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
   $$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x), \end{cases}$$
   car g est paire et h est impaire.
   On en déduit que
   $$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$
   Ainsi, on a démontré que si f s'écrit sous la forme $f = g + h$ avec $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ paire et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ impaire, alors g et h sont données par les formules ci-dessus et sont donc uniques.
   • Synthèse : Regardons si ces fonctions vérifient les conditions de l'énoncé. Posons, pour $x \in \mathbb{R}$,
   $$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$
   Alors, on a $f = g + h$.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x) \text{ et } h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x)$$
   et donc la fonction g est paire et la fonction h est impaire.
   Conclusion : on a donc démontré que toute fonction s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. Raisonnons par analyse-synthèse.
   • Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.
   Pour $(x, y) = (0, 0)$, on a $f(0)^2 - f(0) = 0$, soit $f(0)(f(0) - 1) = 0$. Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
   Pour $(x, y) = (1, 0)$, on a $f(1)f(0) - f(0) = 1$. On en déduit que $f(0) \neq 0$. Donc $f(0) = 1$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Prenons $y = 0$. Alors $f(x)f(0) - f(0) = x$, soit $f(x) - 1 = x$.
   Donc finalement, $f(x) = x + 1$.
   • Synthèse : Vérifions que la fonction $f : x \longmapsto x + 1$ vérifie la condition de l'énoncé.
   On a
   $$\begin{aligned} f(x)f(y) - f(xy) &= (x + 1)(y + 1) - (xy + 1) \\ &= xy + x + y + 1 - xy - 1 \\ &= x + y. \end{aligned}$$
   Donc f est bien solution du problème.
   Conclusion : Il existe une unique fonction f vérifiant, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$, c'est la fonction $x \longmapsto x + 1$.