Feuille de TD n° 6

Vocabulaire en géométrie et opérations élémentaires sur les vecteurs

7 avril 2021

Exercice 1 (Vocabulaire et rappels sur la nature des quadrilatères)**.**

1. Un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles est un . . . .
2. Un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu perpendiculairement est un . . . .
3. Un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles et de même longueur est un . . . .
4. Un quadrilatère qui a trois angles droits est un . . . .
5. Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un . . . .
6. Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un . . . .
7. Un quadrilatère qui est un losange et un rectangle est un . . . .
8. Un quadrilatère dont les quatre côtés sont de même longueur est un . . . .
9. Un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur et qui se coupent en leur milieu est un . . . .
10. Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu perpendiculairement est un . . . .
11. Un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un . . . .
12. Un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont de même longueur est un . . . .
13. Un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux de même longueur est un . . . .
14. Un parallélogramme qui a un angle droit est un . . . .
15. Un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur et un angle droit est un . . . .

Exercice 2 (Formulations différentes)**.**

On considère les deux propositions suivantes :

- P : Le quadrilatère est un parallélogramme
- Q : Les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu.

Indiquer pour chaque phrase la proposition logique utilisée : « $P \Rightarrow Q$ », « $Q \Rightarrow P$ » ou « $P \Leftrightarrow Q$ ».

1. Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il est nécessaire que ses diagonales se coupent en leur milieu.
2. Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu.
3. Une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme est que ses diagonales se coupent en leur milieu.
4. Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

Exercice 3 (Conditions nécessaires/suffisantes)**.**

Soit P la proposition : « Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle ». On considère les propositions suivantes :

- Q_1 : « Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont même longueur »
- Q_2 : « Le quadrilatère $ABCD$ est un carré »,
- Q_3 : « Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme ayant un angle droit »,

Dire si chacune de ces propositions est une condition nécessaire, une condition suffisante, ou une condition nécessaire et suffisante, pour que P soit vraie.

Exercice 4. Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère du plan. On considère les points $A(-2,-3)$, $B(3,3)$ et $C(4,-1)$. On note K le milieu de $[AC]$. Soit P le point défini par la relation

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

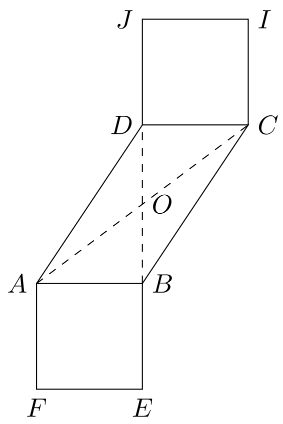
Démontrer que les droites (OP) et (KB) sont parallèles.

Exercice 5. Soit $y \in \mathbb{R}$. Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère du plan. On considère les trois points $A(2,-3)$, $B(1,7)$ et $C(-1,y)$.

À quelle condition les points A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 6.

Soient $ABCD$ un parallélogramme et $ABEF$ et $CDJI$ des carrés situés à l'extérieur de $ABCD$. Notons O le milieu du parallélogramme. Démontrer que O est le milieu du segment $[FI]$.



Exercice 7. Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. Notons I le milieu du segment $[AC]$ et J celui de $[BD]$. Posons, pour tout point M de l'espace,

$$\vec{u}_M = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}.$$

1. Démontrer que, pour tout point M, le vecteur $\vec{u}_M$ ne dépend pas de M.
2. Pour tout point M, exprimer $\vec{u}_M$ en fonction des points I et J.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le quadrilatère $ABCD$ pour que, pour tout point M, $\vec{u}_M$ soit égal au vecteur nul.

Exercice 8. Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan non colinéaires. Posons

$$\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v} = 5\vec{i} - 2\vec{j}.$$

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan.
2. Déterminer les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 9. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan si et seulement si, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, si $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ alors $\lambda = \mu = 0$.