Feuille de TD n° 6

Vocabulaire en géométrie et opérations élémentaires sur les vecteurs

8 avril 2021

Exercice 1 (Vocabulaire et rappels sur la nature des quadrilatères)**.**

1. Un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles est un parallélogramme.
2. Un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu perpendiculairement est un carré.
3. Un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles et de même longueur est un parallélogramme.
4. Un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle
5. Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.
6. Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.
7. Un quadrilatère qui est un losange et un rectangle est un carré.
8. Un quadrilatère dont les quatre côtés sont de même longueur est un losange.
9. Un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur et qui se coupent en leur milieu est un rectangle.
10. Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu perpendiculairement est un losange.
11. Un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle.
12. Un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont de même longueur est un losange.
13. Un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux de même longueur est un parallélogramme.
14. Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.
15. Un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur et un angle droit est un carré.

Exercice 2 (Formulations différentes)**.**

On considère les deux propositions suivantes :

- P : Le quadrilatère est un parallélogramme
- Q : Les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu.

Indiquer pour chaque phrase la proposition logique utilisée : « $P \Rightarrow Q$ », « $Q \Rightarrow P$ » ou « $P \Leftrightarrow Q$ ».

1. Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il est nécessaire que ses diagonales se coupent en leur milieu.
2. Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu.
3. Une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme est que ses diagonales se coupent en leur milieu.
4. Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

---

1. $P \Rightarrow Q$,
2. $P \Rightarrow Q$,
3. $Q \Rightarrow P$,
4. $P \Leftrightarrow Q$.

Exercice 3 (Conditions nécessaires/suffisantes)**.**

Soit P la proposition : « Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle ». On considère les propositions suivantes :

- Q_1 : « Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont même longueur »
- Q_2 : « Le quadrilatère $ABCD$ est un carré »,
- Q_3 : « Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme ayant un angle droit »,

Dire si chacune de ces propositions est une condition nécessaire, une condition suffisante, ou une condition nécessaire et suffisante, pour que P soit vraie.

— Q_1 : condition nécessaire,
— Q_2 : condition suffisante,
— Q_3 : condition nécessaire et suffisante.

Exercice 4. Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère du plan. On considère les points $A(-2,-3)$, $B(3,3)$ et $C(4,-1)$. On note K le milieu de $[AC]$. Soit P le point défini par la relation

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Démontrer que les droites (OP) et (KB) sont parallèles.

Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{KB}$ sont colinéaires.

Les coordonnées de $\overrightarrow{OP}$ sont $\begin{pmatrix} x_A - 2x_B + x_C \\ y_A - 2y_B + y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2\times 3 + 4 \\ -3 - 2\times 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées de K, milieu de $[AC]$, sont $\begin{cases} x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = 1 \\ y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = -2 \end{cases}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{KB}$ sont donc $\begin{pmatrix} x_B - x_K \\ y_B - y_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{OP} = -2\overrightarrow{KB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{KB}$ sont donc colinéaires.

On en déduit que les droites (OP) et (KB) sont parallèles.

Exercice 5. Soit $y \in \mathbb{R}$. Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère du plan. On considère les trois points $A(2,-3)$, $B(1,7)$ et $C(-1,y)$.

À quelle condition les points A, B et C sont-ils alignés ?

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ et les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ y+3 \end{pmatrix}$.

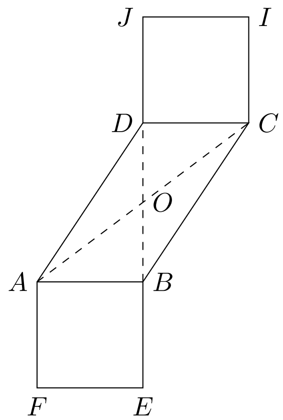
Ces vecteurs sont non nuls. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc colinéaires si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire tel que $\begin{cases} -3 = -k \\ y + 3 = 10k \end{cases}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc colinéaires si et seulement si $y = 27$.

Les points A, B et C sont donc alignés si et seulement si $y = 27$.

Exercice 6.

Soient $ABCD$ un parallélogramme et $ABEF$ et $CDJI$ des carrés situés à l'extérieur de $ABCD$. Notons O le milieu du parallélogramme.
Démontrer que O est le milieu du segment $[FI]$.



Montrons que le quadrilatère $AICF$ est un parallélogramme. Pour cela, montrons que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{IC}$.

$ABEF$ étant un carré, les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux et $\left\|\overrightarrow{AF}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

$CDJI$ étant un carré, les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux et $\left\|\overrightarrow{DC}\right\| = \left\|\overrightarrow{IC}\right\|$.

$ABCD$ étant un parallélogramme, on a également $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont donc orthogonaux au même vecteur $\overrightarrow{AB}$ et sont donc colinéaires.

De plus, $\left\|\overrightarrow{AF}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{DC}\right\| = \left\|\overrightarrow{IC}\right\|$.

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{IC}$ ont même direction, même sens et même norme. Ils sont donc égaux.

Le quadrilatère $AICF$ est donc un parallélogramme.

Les diagonales $[FI]$ et $[AC]$ se coupent donc en leur milieu. Or, par hypothèse, le milieu de $[AC]$ est le point O. On en déduit donc que le point O est le milieu du segment $[FI]$.

D'où le résultat.

Exercice 7. Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. Notons I le milieu du segment $[AC]$ et J celui de $[BD]$. Posons, pour tout point M de l'espace,

$$\vec{u}_M = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}.$$

1. Démontrer que, pour tout point M, le vecteur $\vec{u}_M$ ne dépend pas de M.
2. Pour tout point M, exprimer $\vec{u}_M$ en fonction des points I et J.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le quadrilatère $ABCD$ pour que, pour tout point M, $\vec{u}_M$ soit égal au vecteur nul.

---

1. Soit un point M. On a
$$\begin{aligned}\vec{u}_M &= \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\\ &= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC}\\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}, \quad \text{par la relation de Chasles.}\end{aligned}$$
Le vecteur $\vec{u}_M$ ne dépend donc pas de M.
2. Soit un point M.
Le point I étant le milieu de $[AC]$, on a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ et le point J étant le milieu de $\overrightarrow{BD}$, on a $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JD}$.
On a donc, par la relation de Chasles,
$$\begin{aligned}\vec{u}_M &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{MJ} - \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{MJ} - \overrightarrow{JD}\\ &= 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MJ} - \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{JB} - \overrightarrow{JD}\\ &= 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MJ}\\ &= 2\overrightarrow{JI}.\end{aligned}$$

3. On en déduit que pour tout point M, $\vec{u}_M = \vec{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{0}$, soit si et seulement si $I = J$, soit finalement si et seulement si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 8. Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan non colinéaires. Posons

$$\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \text{ et } \vec{v} = 5\vec{i} - 2\vec{j}.$$

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan.
2. Déterminer les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

---

1. Supposons par l'absurde que $(\vec{u}, \vec{v})$ ne soit pas une base du plan. Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Ces vecteurs étant non nuls, il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, soit $2\vec{i} + 3\vec{j} = 5k\vec{i} - 2k\vec{j}$.
   On a donc $(2 - 5k)\vec{i} = -(3 + 2k)\vec{j}$. Le vecteur $\vec{j}$ étant non nul (puisque $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires), $2 - 5k \neq 0$ et $\vec{i} = -\dfrac{3+2k}{2-5k}\vec{j}$, ce qui contredit le fait que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires.
   Donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan.
2. Exprimons $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   On a $\begin{cases} \vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \\ \vec{v} = 5\vec{i} - 2\vec{j} \end{cases}$, donc $\begin{cases} 2\vec{u} = 4\vec{i} + 6\vec{j} \\ 3\vec{v} = 15\vec{i} - 6\vec{j} \end{cases}$ et $\begin{cases} 5\vec{u} = 10\vec{i} + 15\vec{j} \\ -2\vec{v} = -10\vec{i} + 4\vec{j} \end{cases}$.
   En additionnant les lignes de chaque système, on obtient alors
   $$\begin{cases} 19\vec{i} = 2\vec{u} + 3\vec{v} \\ 19\vec{j} = 5\vec{u} - 2\vec{v} \end{cases}, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \vec{i} = \dfrac{2}{19}\vec{u} + \dfrac{3}{19}\vec{v} \\ \vec{j} = \dfrac{5}{19}\vec{u} - \dfrac{2}{19}\vec{v} \end{cases}.$$
   Les coordonnées de $\vec{i}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sont donc $\left(\dfrac{2}{19}, \dfrac{3}{19}\right)$ et celles de $\vec{j}$ sont $\left(\dfrac{5}{19}, -\dfrac{2}{19}\right)$.

Exercice 9. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan si et seulement si, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, si $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ alors $\lambda = \mu = 0$.

Raisonnons par double implication.

• Démontrons, par contraposée, que si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, si $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ alors $\lambda = \mu = 0$.

Supposons qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ et $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

1^er^ cas : $\lambda \neq 0$. Alors $\vec{u} = -\dfrac{\mu}{\lambda}\vec{v}$.

2^nd^ cas : $\mu \neq 0$. Alors $\vec{v} = -\dfrac{\lambda}{\mu}\vec{u}$.

Donc dans tous les cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas une base du plan.

D'où, par contraposée, la première implication.

• Démontrons, par contraposée, que si pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, si $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ alors $\lambda = \mu = 0$, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan.

Supposons que $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas une base du plan. Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Si $\vec{u} = k\vec{v}$, alors en posant $\lambda = 1$ et $\mu = -k$, on a $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ et $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Si $\vec{v} = k\vec{u}$, alors en posant $\lambda = k$ et $\mu = -1$, on a $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ et $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Donc dans tous les cas, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ et $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

D'où, par contraposée, l'implication réciproque.

• Finalement, $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan si et seulement si, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, si $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ alors $\lambda = \mu = 0$.