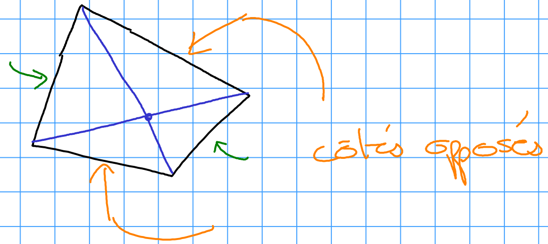
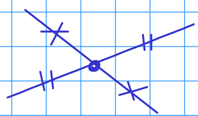
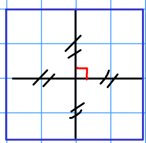
TD 6 - Sciences en français / Maths

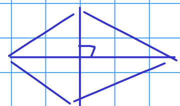
Exercice 1

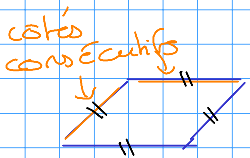
parallélogramme
rectangle
losange
carré.

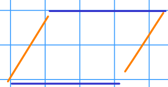




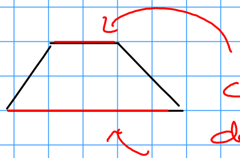








Ceci est un trapèze.



côtés opposés de longueurs différentes

13. trapèze ?

non.

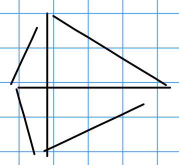
Exercice 2

1. $P \Rightarrow Q$ Q est une condition nécessaire pour P.
2. $P \Rightarrow Q$.
3. $Q \Rightarrow P$. Q est une condition suffisante pour P.
4. $P \Leftrightarrow Q$.

Exercice 3

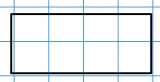
1. $P \Rightarrow Q_1$ $\quad Q_1$: condition nécessaire.

$Q_1 \not\Rightarrow P$?



2. $Q_2 \Rightarrow P$ $\quad Q_2$: condition suffisante

$P \not\Rightarrow Q_2$?



3. $P \Leftrightarrow Q_3$ $\quad Q_3$: condition nécessaire et suffisante

$P \Rightarrow Q_3$ et $Q_3 \Rightarrow P$

$x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2}$

$y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2}$

Exercice 4

Montrons que les vecteurs $\vec{OP}$ et $\vec{KB}$ sont colinéaires.

On a $\vec{OP} \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$

On a $K \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc $\vec{KB} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On a donc $\vec{OP} = -2\vec{KB}$.

Donc les vecteurs $\vec{OP}$ et $\vec{KB}$ sont colinéaires.

Donc les droites (OP) et (KB) sont parallèles.

Exercice 5

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

On a $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-3\\y+3\end{pmatrix}$.

$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires ssi il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$\vec{AC} = k\,\vec{AB}$ ssi $\begin{pmatrix}-3\\y+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k\\10k\end{pmatrix}$

ssi $\left\{\begin{array}{l}-3 = -k\\ y+3 = 10k\end{array}\right.$ "système".

ssi $\left\{\begin{array}{l}k = 3\\ y = 27\end{array}\right.$.

Les points A, B et C sont donc alignés si et seulement si $y = 27$.

Exercice 6

- Montrons que AICF est un parallélogramme, en montrant que $\vec{AF} = \vec{IC}$.

Les vecteurs $\vec{AF}$ et $\vec{AB}$ sont orthogonaux car ABEF est un carré.

Les vecteurs $\vec{IC}$ et $\vec{DC}$ sont orthogonaux car ICDJ est un carré.

Or $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ sont égaux car ABCD est un parallélogramme.

Donc $\vec{AF}$ et $\vec{IC}$ sont orthogonaux à $\vec{AB}$ donc $\vec{AF}$ et $\vec{IC}$ sont colinéaires.

De plus, $\|\vec{AF}\| = \|\vec{AB}\|$ car ABEF est un carré

$= \|\vec{DC}\|$

$= \|\vec{IC}\|$ car $ICDJ$ est un carré.

Donc $\vec{AF}$ et $\vec{IC}$ ont même direction, même sens et même norme. Donc $\vec{AF} = \vec{IC}$.

Donc $AICF$ est un parallélogramme.

Or dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu. Donc $[IF]$ et $[AC]$ ont le même milieu.

Par hypothèse, le milieu de $[AC]$ est le point O.

Donc O est le milieu de $[FI]$.

Exercice 7

1. Soit M un point.

On a $\vec{u}_M = \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD}$

$= \vec{BM} + \vec{MA} + \vec{DM} + \vec{MC}$ relation de Chasles.

$= \vec{BA} + \vec{DC}$

2. Soit un point M.

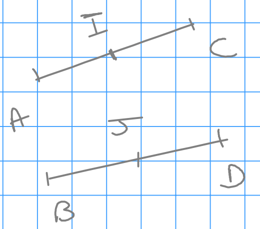
On a $\vec{u}_M = \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD}$

$= \vec{MI} + \vec{IA} - \vec{MJ} - \vec{JB} + \vec{MI} + \vec{IC} - \vec{MJ} - \vec{JD}$ par la relation de Chasles

$= 2\vec{MI} - 2\vec{MJ}$

$= 2\vec{JM} + 2\vec{MI}$

$= 2\vec{JI}$.



$\vec{AI} = \vec{IC}$

$\vec{BJ} = \vec{JD}$.

$\vec{IA} + \vec{IC} = \vec{0}$

$\vec{JB} + \vec{JD} = \vec{0}$

3. On a $\vec{u}_M = \vec{0}$ ssi $\vec{JI} = \vec{0}$ ssi $I = J$

ssi $ABCD$ est un parallélogramme.

Dans le plan, $(\vec{a},\vec{b})$ forme / est une base du plan ssi $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 8

1. Supposons par l'absurde que $(\vec{u},\vec{v})$ ne soit pas une base du plan. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (sinon si $\vec{u}=\vec{0}$ alors $2\vec{i}+3\vec{j}=\vec{0}$,

donc $\vec{i}=-\frac{3}{2}\vec{j}$, ceci est absurde car $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires ; de même, $\vec{v}\neq\vec{0}$).

On sait qu'il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

On a donc $5\vec{i}-2\vec{j}=2k\vec{i}+3k\vec{j}$.

Si $5-2k=0$, alors $(3k+2)\vec{j}=\vec{0}$ donc $3k+2=0$ Absurde.

① Donc $\underbrace{(5-2k)}_{\neq 0}\vec{i}=(3k+2)\vec{j}$,

donc $\vec{i}=\dfrac{3k+2}{5-2k}\vec{j}$,

donc $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires, ce qui est absurde par hypothèse.

Donc $(\vec{u},\vec{v})$ est une base du plan.

ou ② $(\vec{i},\vec{j})$ forme une base du plan, donc $\begin{cases}5=2k\\-2=3k\end{cases}$ Absurde.

Donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan.

2. $\begin{cases} \vec{i} = x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v} \\ \vec{j} = y_1 \vec{u} + y_2 \vec{v} \end{cases}$ A déterminer.

On a $\begin{cases} \vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} & \times 2 \quad \times 5 \\ \vec{v} = 5\vec{i} - 2\vec{j} & \times 3 \quad \times -2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\vec{u} + 3\vec{v} = 19\vec{i} \\ 5\vec{u} - 2\vec{v} = 19\vec{j} \end{cases}$

donc $\begin{cases} \vec{i} = \frac{2}{19}\vec{u} + \frac{3}{19}\vec{v} \\ \vec{j} = \frac{5}{19}\vec{u} - \frac{2}{19}\vec{v} \end{cases}$ donc les coordonnées de $\vec{i}$ sont $\left(\frac{2}{19}, \frac{3}{19}\right)$ et celles de $\vec{j}$ sont $\left(\frac{5}{19}, -\frac{2}{19}\right)$.

$Q : \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (\lambda,\mu) = (0,0))$

$\text{non}\, Q : \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ ET $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$.

Exercice 9

Démontrons par double implication que $P \Leftrightarrow Q$.

- $(\Rightarrow)$ Montrons par contraposée que $P \Rightarrow Q$,

Supposons qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ et $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ $(\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0)$

Montrons que $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas une base du plan, c'est-à-dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1er cas : $\lambda \neq 0$. On a donc $\vec{u} = \frac{-\mu}{\lambda}\vec{v}$.

2nd cas : $\mu \neq 0$. On a donc $\vec{v} = -\frac{\lambda}{\mu}\vec{u}$.

Dans tous les cas, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas une base du plan.

D'où $P \Rightarrow Q$ par contraposée.

- Réciproquement, montrons $Q \Rightarrow P$ par contraposée.

Supposons que $(\vec{u}, \vec{v})$ ne soit pas une base du plan.

Montrons qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ et $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$.

Par hypothèse, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$,

soit encore $\underset{\lambda}{1} . \vec{u} \underbrace{-k}_{\mu} \vec{v} = \vec{0}$ ou $\underset{\lambda}{k} \vec{u} \underbrace{-1}_{\mu} \vec{v} = \vec{0}$.

Si $1\vec{u} - k\vec{v} = \vec{0}$ alors en posant $\lambda = 1$ et $\mu = -k$, on a $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$.

Si $k\vec{u} - 1\vec{v} = \vec{0}$ alors en posant $\lambda = k$ et $\mu = -1$, on a $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$.

D'où non(Q).

D'où par contraposée $Q \Rightarrow P$.

- Finalement $P \Leftrightarrow Q$.