Feuille de TD n° 7

Vocabulaire en géométrie, produit scalaire et produit vectoriel

13 avril 2021

Exercice 1 (Vocabulaire et construction géométrique)**.**

1. Tracer un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Placer le point A de coordonnées $(3,3)$ et le point P de coordonnées $(3,1)$.
3. Tracer la droite $\mathcal{D}_1$ passant par l'origine du repère et le point A.
4. Placer le point Q, symétrique du point P par rapport à la droite $\mathcal{D}_1$.
5. Placer le point I, projeté du point Q sur la droite dirigée par $\vec{j}$ parallèlement à la droite $\mathcal{D}_1$.
6. Tracer la droite $\mathcal{D}_2$ perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ passant par le point I.
7. Noter J le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}_2$ et de la droite dirigée par $\vec{i}$.
8. Quelle est la nature du quadrilatère $IJPQ$?

Exercice 2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-2,2)$, $B(4,4)$, $C(5,1)$ et $D(-1,-1)$. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer un vecteur unitaire et normal au plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Déterminer un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 4. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct.

1. Déterminer une équation cartésienne (de la forme $ax + by + cz + d = 0$) du plan passant par les points $A(1,0,-2)$, $B(0,2,1)$ et $C(-1,1,0)$.
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $M(a,b)$ sur la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x - 2y - 1 = 0$.

Exercice 5. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Démontrer que

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

Exercice 6 (Formule d'Al-Kashi)**.** Soit ABC un triangle du plan. On note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. Démontrer que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC}).$$

Exercice 7. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct.

1. Calculer $\alpha = \left\|\vec{u}\wedge\vec{i}\right\|^2 + \left\|\vec{u}\wedge\vec{j}\right\|^2 + \left\|\vec{u}\wedge\vec{k}\right\|^2$.
2. En déduire que l'une de ces trois normes est supérieure ou égale à $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Exercice 8. Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace. On veut déterminer les solutions $\vec{x}$ de l'équation vectorielle

$$\vec{x} + \vec{a}\wedge\vec{x} = \vec{b}.$$

1. Soit $\vec{x}$ une solution. Montrer que $\vec{a}\cdot\vec{x} = \vec{a}\cdot\vec{b}$.
2. En déduire une expression de $\vec{x}$. *On pourra utiliser la proposition 62 du cours.*
3. Conclure.