Feuille de TD n° 7

Vocabulaire en géométrie, produit scalaire et produit vectoriel

16 avril 2021

Exercice 1 (Vocabulaire et construction géométrique)**.**

1. Tracer un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Placer le point A de coordonnées $(3, 3)$ et le point P de coordonnées $(3, 1)$.
3. Tracer la droite $\mathcal{D}_1$ passant par l'origine du repère et le point A.
4. Placer le point Q, symétrique du point P par rapport à la droite $\mathcal{D}_1$.
5. Placer le point I, projeté du point Q sur la droite dirigée par $\vec{j}$ parallèlement à la droite $\mathcal{D}_1$.
6. Tracer la droite $\mathcal{D}_2$ perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ passant par le point I.
7. Noter J le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}_2$ et de la droite dirigée par $\vec{i}$.
8. Quelle est la nature du quadrilatère $IJPQ$?

Réponse : le quadrilatère $IJPQ$ est un rectangle.

Exercice 2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-2, 2)$, $B(4, 4)$, $C(5, 1)$ et $D(-1, -1)$. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Les coordonnées du milieu I du segment $[AC]$ sont $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et celles du milieu J du segment $[BD]$ sont $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent donc en leur milieu et $ABCD$ est donc un parallélogramme.

De plus, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 6 \times 1 + 2 \times (-3) = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont donc orthogonaux. Les droites (AB) et (AD) sont donc perpendiculaires. Le parallélogramme $ABCD$ admet donc un angle droit, c'est donc un rectangle.

Exercice 3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un vecteur unitaire et normal au plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Déterminer un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

---

1. Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal au plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

   Le vecteur $\vec{n} = \dfrac{1}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} \vec{u} \wedge \vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur unitaire et normal à ce plan.
2. Le vecteur $\vec{n} \wedge \vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{n}$. Comme il est orthogonal à $\vec{n}$, il est coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 4.

1. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct. Déterminer une équation cartésienne (de la forme $ax + by + cz + d = 0$) du plan passant par les points $A(1, 0, -2)$, $B(0, 2, 1)$ et $C(-1, 1, 0)$.
2. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $M(a, b)$ sur la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x - 2y - 1 = 0$.

---

1. Un vecteur normal au plan est $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Un point $M(x, y, z)$ appartient au plan si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit si et seulement si
$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z+2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0,$$
   soit finalement si et seulement si $= x - 4y + 3z + 5 = 0$.
   Une équation du plan est donc $x - 4y + 3z + 5 = 0$.
2. Notons $P(x_P, y_P)$ le projeté orthogonal de M sur la droite $\mathcal{D}$. Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est $\vec{u} = (2, 1)$.
   Alors $P \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{u} = 0$, c'est-à-dire $x_P - 2y_P - 1 = 0$ et $\begin{pmatrix} a - x_P \\ b - y_P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

   On a donc $\begin{cases} x_P - 2y_P - 1 = 0 \\ 2(a - x_P) + b - y_P = 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x_P = 2y_P + 1 \\ y_P = \dfrac{2a + b - 2}{5} \end{cases}$.

   D'où $(x_P, y_P) = \left(\dfrac{4a + 2b + 1}{5}, \dfrac{2a + b - 2}{5}\right)$.

Exercice 5. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Démontrer que
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

On a
$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2. \end{aligned}$$
Donc finalement, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

Exercice 6 (Formule d'Al-Kashi)**.** Soit ABC un triangle du plan. On note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. Démontrer que
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC}).$$

Par la relation de Chasles,
$$\begin{aligned} a^2 &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 \\ &= b^2 - 2cb\cos(\widehat{BAC}) + c^2. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 7. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct.

1. Calculer $\alpha = \left\|\vec{u} \wedge \vec{i}\right\|^2 + \left\|\vec{u} \wedge \vec{j}\right\|^2 + \left\|\vec{u} \wedge \vec{k}\right\|^2$.
2. En déduire que l'une de ces trois normes est supérieure ou égale à $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

---

1. On a $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Donc $\vec{u} \wedge \vec{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}$, $\vec{u} \wedge \vec{j} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \wedge \vec{k} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Donc $\alpha = z^2 + (-y)^2 + (-z)^2 + x^2 + y^2 + (-x)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2\,\|\vec{u}\|^2$.
   Comme $\vec{u}$ est unitaire, $\alpha = 2$.

2. Supposons par l'absurde que les trois normes sont strictement supérieures à $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

   Alors $\alpha > \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} = 2$.
   Or, d'après la question précédente, $\alpha = 2$. Ceci est absurde.
   Donc l'une de ces trois normes est supérieure ou égale à $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Exercice 8. Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace. On veut déterminer les solutions $\vec{x}$ de l'équation vectorielle

$$\vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}.$$

1. Soit $\vec{x}$ une solution. Montrer que $\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{a} \cdot \vec{b}$.
2. En déduire une expression de $\vec{x}$. *On pourra utiliser la proposition 62 du cours.*
3. Conclure.

---

1. Comme $\vec{a} \wedge \vec{x}$ est orthogonal à $\vec{a}$, $\vec{a} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{x}) = 0$
   Donc $\vec{a} \cdot (\vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x} + \vec{a} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$ et comme $\vec{x}$ est solution, $\vec{a} \cdot (\vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$.
   Donc $\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{a} \cdot \vec{b}$.
2. D'une part,

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge (\vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x}) &= \vec{a} \wedge \vec{x} + \vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{x}) \\ &= \vec{a} \wedge \vec{x} + (\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{a} - \|\vec{a}\|^2 \, \vec{x} \\ &= (\vec{b} - \vec{x}) + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - \|\vec{a}\|^2 \, \vec{x} \end{aligned}$$

   et d'autre part, $\vec{a} \wedge (\vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x}) = \vec{a} \wedge \vec{b}$.
   Donc $\vec{b} - \vec{x} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - \|\vec{a}\|^2 \, \vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{b}$,
   et finalement,

$$\vec{x} = \frac{1}{1 + \|\vec{a}\|^2}(\vec{b} - \vec{a} \wedge \vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}).$$

3. Réciproquement, on vérifie en utilisant la formule du double produit vectoriel que ce vecteur est solution :

$$\vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x} = \frac{1}{1 + \|\vec{a}\|^2}(\vec{b} - \vec{a} \wedge \vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} + \|\vec{a}\|^2 \, \vec{b}) = \vec{b}.$$

   L'équation admet donc une unique solution, le vecteur $\vec{x} = \dfrac{1}{1 + \|\vec{a}\|^2}(\vec{b} - \vec{a} \wedge \vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a})$.