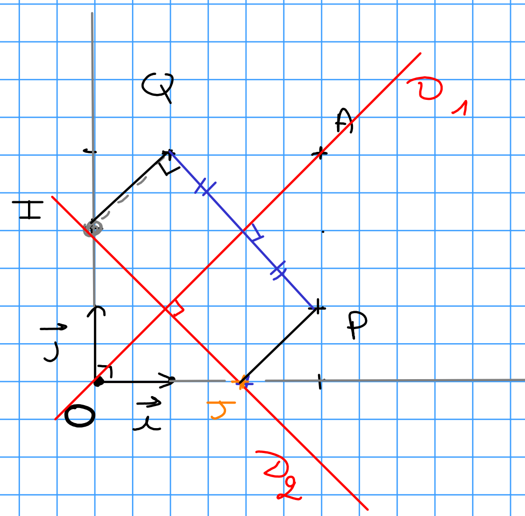
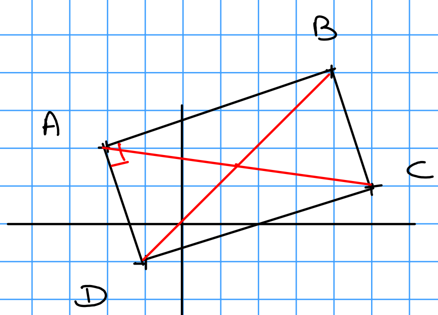
TD 7 - Sciences en français / Maths

Exercice 1

Donc IJPQ est un rectangle.



Exercice 2



• Montrons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Donc ABCD est un parallélogramme.

• Montrons que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux ~~perpendiculaires~~

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

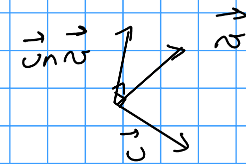
Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6 \times 1 + 2 \times (-3) = 0$. Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux. Donc l'angle $\widehat{DAB}$ est droit.

Or un parallélogramme avec un angle droit est un rectangle.

Donc ABCD est un <u>rectangle</u>.

Exercice 3

1. Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est



$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

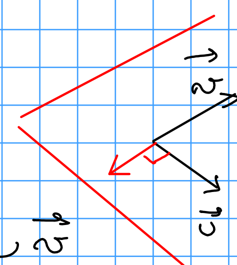
$$= \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Donc le vecteur $\vec{n} = \dfrac{1}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}\,\vec{u}\wedge\vec{v}$ est unitaire et normal à $\mathcal{P}$.

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

2. Soit $\vec{w}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Méthode 1



Il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\vec{w}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ et $\vec{w}\cdot\vec{u}=0$

Donc il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

et $x+2y-3z=0$

Donc $\begin{cases}x+2y-3z=0\\x=\lambda\\y=2\lambda-\mu\\z=-3\lambda+\mu\end{cases}$, donc $\begin{cases}\lambda+4\lambda-2\mu+9\lambda-3\mu=0\\x=\lambda\\y=2\lambda-\mu\\z=-3\lambda+\mu\end{cases}$,

donc $\begin{cases}14\lambda=5\mu\\x=\lambda\\y=2\lambda-\mu\\z=-3\lambda+\mu\end{cases}$. Posons $\lambda=5$.

Alors $\mu=14$, et $\vec{w}\,(5,-4,-1)$.

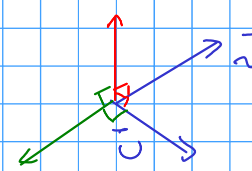
On vérifie que $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Méthode 2

ou Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Donc $\vec{u} \wedge \vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$, et à $\vec{n}$, donc $\vec{u} \wedge \vec{n}$ est coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} \wedge \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ répond à la question.

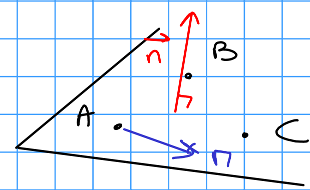


Remarque : $\vec{x} \in \mathcal{P}$ ssi $\vec{x} \cdot \vec{n} = 0$ ssi $\vec{x}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. Donc $\vec{u} \wedge \vec{n} \in \mathcal{P}$ car $\vec{u} \wedge \vec{n}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

Exercice 4

1. Un vecteur normal au plan est

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}.$$



$M \in \mathcal{P}$ ssi $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Soit $M(x, y, z)$.

Alors $M \in \mathcal{P}$ ssi $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

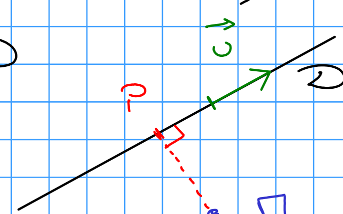
ssi $\begin{pmatrix}x-1\\y\\z+2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} = 0$

ssi $x - 1 - 4y + 3z + 6 = 0$

ssi $x - 4y + 3z + 5 = 0$.

Donc l'équation cartésienne du plan est $x - 4y + 3z + 5 = 0$.

2. Notons $P(x_P, y_P)$ le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, et $\vec{u} = (2, 1)$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.



$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{u} = 0$

Alors $P \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{u} = 0$.

|| Rappel : Si $\mathcal{D}$ a pour équation $ax + by + c = 0$ alors un vecteur directeur est $(-b, a)$.

Alors $\begin{cases} x_P - 2y_P - 1 = 0 \\ \begin{pmatrix}a - x_P\\b - y_P\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 0 \end{cases}$, donc $\begin{cases} x_P - 2y_P - 1 = 0 \\ 2a - 2x_P + b - y_P = 0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_p = 2y_p + 1 \\ 2a - 2(2y_p+1) + b - y_p = 0 \end{cases}$, donc $\begin{cases} x_p = 2y_p+1 \\ -5y_p = -2a - b + 2 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_p = \dfrac{4a+2b+3}{5} \\ y_p = \dfrac{2a+b-2}{5} \end{cases}$.

Donc les coordonnées de P sont $\begin{pmatrix} \dfrac{4a+2b+3}{5} \\ \dfrac{2a+b-2}{5} \end{pmatrix}$.

Exercice 5

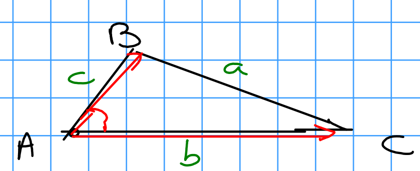
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$) bilinéarité

$= \vec{u}.\vec{u} + \underbrace{\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u}}_{2\vec{u}.\vec{v}} + \vec{v}.\vec{v}$ car le produit scalaire est symétrique

$= \|u\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Donc $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|u\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

Exercice 6



$a^2 = \|\vec{BC}\|^2$

$= \vec{BC}.\vec{BC}$

$= (\vec{BA}+\vec{AC}).(\vec{BA}+\vec{AC})$

$= \vec{BA}.\vec{BA} + \vec{BA}.\vec{AC} + \vec{AC}.\vec{BA} + \vec{AC}.\vec{AC}$

$= c^2 + 2\vec{BA}.\vec{AC} + b^2$ $\quad (\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(u,v))$

$= c^2 - 2\vec{AB}.\vec{AC} + b^2$

$= c^2 - 2cb\cos(\widehat{BAC}) + b^2$.

Exercice 7

$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$\vec{u}\wedge\vec{i} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\z\\-y\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{j} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-z\\0\\x\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{k} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\-x\\0\end{pmatrix}.$$

Donc $\alpha = z^2+y^2+z^2+x^2+y^2+x^2 = 2(x^2+y^2+z^2)$

$= 2\|\vec{u}\|^2$

$= 2.$

2. Par l'absurde,

Si toutes les normes sont $< \sqrt{\frac{2}{3}}$,

alors $\alpha < \frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3} = 2.$ Absurde car $\alpha = 2.$

Exercice 8 $\quad \vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$.

1. $\vec{a} \cdot (\vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ car $\vec{x}$ est solution

Donc $\vec{a} \cdot \vec{x} + \underbrace{\vec{a} \cdot \underbrace{(\vec{a} \wedge \vec{x})}_{\text{orthogonal à } \vec{a}}}_{0} = \vec{a} \cdot \vec{b}$

$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$
$= (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$

Donc $\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

2. On a $\vec{a} \wedge (\vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x}) = \vec{a} \wedge \vec{b}$,

donc $\vec{a} \wedge \vec{x} + \vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{x}) = \vec{a} \wedge \vec{b}$

donc $\vec{b} - \vec{x} + (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a}) \vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

donc $\vec{b} - \vec{x} + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a} - \|\vec{a}\|^2 \vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

donc $\vec{x} \left(-1 - \|\vec{a}\|^2\right) = \vec{a} \wedge \vec{b} - \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a}$

Donc $\vec{x} = \dfrac{1}{1 + \|a\|^2} \left(\vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a} - \vec{a} \wedge \vec{b}\right)$.

$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$

3. Posons $\vec{x} = \dfrac{1}{1 + \|a\|^2} \left(\vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a} - \vec{a} \wedge \vec{b}\right)$

On a
$$\vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x} = \frac{1}{1 + \|a\|^2} \left(\vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a} - \cancel{\vec{a} \wedge \vec{b}}\right) + \frac{1}{1 + \|a\|^2} \left(\cancel{\vec{a} \wedge \vec{b}} + \vec{0} - \vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})\right)$$
$$= \frac{1}{1 + \|a\|^2} \left(\vec{b} + \cancel{(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a}} - \cancel{(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a}} + \|a\|^2 \vec{b}\right)$$
$$= \frac{1}{1 + \|a\|^2} \vec{b} \left(1 + \|\vec{a}\|^2\right) = \vec{b}.$$

Donc $\vec{x}$ est solution de l'équation.

Conclusion. L'équation admet une unique solution,

$$\frac{1}{1 + \|a\|^2} \left(\vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a} - \vec{a} \wedge \vec{b}\right).$$