Corrigé du TD n° 8

Vocabulaire et généralités sur les fonctions

23 avril 2021

Exercice 1 (Vocabulaire)**.**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		-10		-3		0		1		$+\infty$
$f(x)$	10	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

1. La fonction f est-elle bornée sur son ensemble de définition ?
2. Quel est le **signe** \正负\ de l'image de -3 ?
3. Le nombre 8 admet-il un antécédent par la fonction f ?
4. La fonction f est-elle minorée sur l'intervalle $]-\infty, 10[$?
5. Combien l'équation $f(x) = 1$ admet-elle de solutions ?
6. Comparer les images par f des nombres -4 et $\dfrac{1}{2}$.
7. La fonction f admet-elle un maximum global ? des maximums locaux ? Si oui, les préciser.
8. Donner le minimum de f sur l'intervalle $[-10, 1]$ et indiquer en quelle valeur il est atteint.
9. Quelle est la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$?
10. La fonction f est-elle paire ?
11. Le point $(0, 4)$ appartient-il à la courbe représentative de la fonction f ?
12. Quelle est la limite de f en $+\infty$?

Remarque : Avec un tableau de variations sous cette forme, il est sous-entendu que la fonction est continue.

1. La fonction f n'est pas bornée car elle n'est pas minorée. Elle tend vers $-\infty$ en $+\infty$.
2. Le signe de l'image de -3 est positif car $f(-3) = 2 \geq 0$.
3. Le nombre 8 admet un antécédent par la fonction f car $8 \in f(]-\infty, -10]) = [0, 10]$.
4. La fonction f est minorée par 0 sur $]-\infty, 10]$ par $\min(-2, f(10))$.
5. L'équation $f(x) = 1$ admet 3 solutions ou une infinité (si f est constante égale à 3 sur un intervalle non réduit à un point).
6. On a $f(-4) \geq 0$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq -1$, donc $f(-4) \geq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
7. Si la valeur 10 est atteinte par la fonction f, alors f admet un maximum global égal à 10, sinon f n'admet pas de maximum global.
   La fonction f admet deux maximaux locaux, égaux à 2 et -1, atteints respectivement en -3 et en 1.
8. Le minimum de f sur l'intervalle $[-10, 1]$ vaut -2, atteint en 0.
9. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0, 1]$.
10. La fonction f n'est pas paire puisque f change de sens de variations au point 1 mais pas au point -1.
11. Le point $(0, 4)$ n'appartient pas à la courbe représentative de la fonction f car $f(0) = -2 \neq 4$.

12. La limite de f en $+\infty$ vaut $-\infty$.

Exercice 2. Donner les éléments appartenant aux ensembles suivants :

1. $E = \{10^k k \mid 1 \leq k \leq 4\}$,
2. $F = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists\,(a,b) \in [\![1,2]\!]^2,\, x = \dfrac{a}{a+b}\right\}$.

---

1. $E = \{10^1 \times 1, 10^2 \times 2, 10^3 \times 3, 10^4 \times 4\} = \{10, 200, 3000, 40000\}$, *il est sous-entendu que $k \in \mathbb{N}$ mais cela aurait dû être précisé :* $E = \{10^k k \mid k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 4\}$
2. $F = \left\{\dfrac{1}{1+1}, \dfrac{1}{1+2}, \dfrac{2}{2+1}, \dfrac{2}{2+2}\right\} = \left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right\}$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \longmapsto \dfrac{\ln(|x|)}{\sqrt{3 - \mathrm{e}^x}}$,
2. $f_2 : x \longmapsto \sqrt{\ln(2 - \sqrt{x})}$,
3. $f_3 : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{\ln(4x - x^2)}$.

---

1. L'ensemble de définition de la fonction f_1 est $\mathcal{D}_{f_1} =]-\infty, \ln(3)[\setminus\{0\}$.
2. L'ensemble de définition de la fonction f_2 est $\mathcal{D}_{f_2} = [0, 1]$,
3. L'ensemble de définition de la fonction f_3 est $\mathcal{D}_{f_3} = [1, 4] \setminus \{2 + \sqrt{3}\}$.

Exercice 4.

1. Déterminer l'image par la fonction $x \longmapsto |x|$ de l'intervalle $]-1, 3]$.
2. Déterminer l'image par la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ de l'ensemble $]-2, 4] \setminus \{0\}$.
3. Déterminer l'image par la fonction $x \longmapsto (x-1)^2$ de l'intervalle $]-1, 2]$.

---

1. L'image par la fonction $x \longmapsto |x|$ de l'intervalle $]-1, 3]$ est $[0, 3]$.
2. L'image par la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ de l'ensemble $]-2, 4] \setminus \{0\}$ est $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$.
3. L'image par la fonction $x \longmapsto (x-1)^2$ de l'intervalle $[0, 4[$.

Exercice 5. Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto x + \sqrt{x^2+1}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $x^2 + 1 > x^2$. La fonction $\sqrt{\cdot}$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a alors $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$.

Donc $x + \sqrt{x^2+1} > x + |x|$.

Or $|x| = \max(x, -x) \geq -x$.

Donc $x + \sqrt{x^2+1} > x + |x| \geq 0$, soit $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

Donc $f(x) > 0$ et f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6. On s'intéresse aux propriétés des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$,

ii) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $f(xy) = f(x)f(y)$.

1. Déterminer les fonctions constantes vérifiant i) et ii).

Dans la suite de l'exercice, on considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ non constante vérifiant i) et ii).

2. Montrer que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
3. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x^n) = f(x)^n$.

   (b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, si $x \neq 0$ alors $f(x) \neq 0$ et $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$.

   (c) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, si $x > 0$ alors $f(x) > 0$.
4. Montrer que f est croissante.

---

1. • Soit f une fonction constante égale à C vérifiant i) et ii).
   De la relation i), on obtient $C \geq 2C$. Donc $C \leq 0$.
   De la relation ii), on obtient $C = C^2$. Donc $C = 0$ ou $C = 1$.
   Comme $C \leq 0$, on en déduit que $C = 0$.
   Donc f est la fonction nulle.
   • Réciproquement, la fonction nulle vérifie i) et ii).
2. • De la relation i), on a $f(0) = f(0+0) \geq f(0) + f(0)$. Donc $f(0) \leq 0$.
   De la relation ii), on a $f(0) = f(0 \times 0) = f(0)^2$. Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
   Comme $f(0) \leq 0$, on en déduit que $f(0) = 0$.
   • De la relation ii), on a $f(1) = f(1 \times 1) = f(1)^2$. Donc $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$.
   Supposons, par l'absurde que $f(1) = 0$.
   Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, par la relation ii), on obtient $f(x) = f(x \times 1) = f(x) \times f(1) = 0$.
   Donc f est la fonction nulle. Ceci est absurde car f est une fonction non constante.
   Donc $f(1) = 1$.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrons par récurrence le résultat.
   Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ la proposition, « $f(x^n) = f(x)^n$ ».
   • Initialisation : pour $n = 0$, on a $f(x^0) = f(1) = 1 = f(1)^0$ d'après la question 2.. D'où $P(1)$.
   • Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$.
   On a

$$\begin{aligned} f(x^{n+1}) &= f(x^n \times x) \\ &= f(x^n) \times f(x) \quad \text{d'après la relation ii)} \\ &= f(x)^n \times f(x) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= f(x)^{n+1}. \end{aligned}$$

   D'où $P(n+1)$.
   Donc, par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x^n) = f(x)^n$.
   D'où le résultat.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Supposons $x \neq 0$.
   Alors, d'après la relation ii), $f(1) = f\left(x \times \frac{1}{x}\right) = f(x) \times f\left(\frac{1}{x}\right)$.
   De $f(1) = 1$, on obtient $1 = f(x) \times f\left(\frac{1}{x}\right)$.
   Ainsi, $f(x) \neq 0$ et $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$.
   D'où le résultat.

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Supposons $x \neq 0$.
   Alors, d'après la relation ii), $f(x) = f(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0$.
   Comme $x \neq 0$, d'après la question précédente, $f(x) \neq 0$.
   Donc $f(x) > 0$.
   D'où le résultat.
4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. Supposons que $x \leq y$. Montrons que $f(x) \leq f(y)$.
   On a

$$\begin{aligned} f(y) &= f((y-x)+x) \\ &\geq f(y-x) + f(x) \quad \text{d'après la relation i.} \end{aligned}$$

   Or $y - x \geq 0$ donc $f(y-x) \geq 0$. Donc $f(y) \geq f(x)$.
   La fonction f est donc croissante.