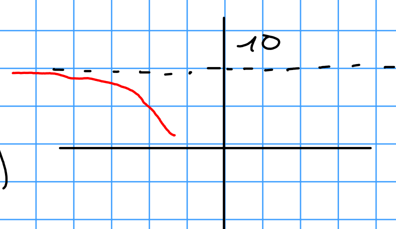
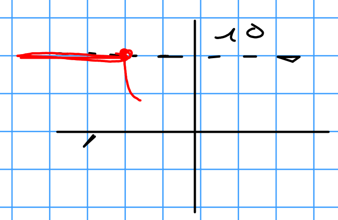
TD 8 - Sciences en français . Maths

Exercice 1

1. Non car $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (f n'est donc pas minorée).
2. On a $f(-3) = 2 \geq 0$ donc l'image de -3 par f est de signe positif. Signe : positif ou négatif
3. Oui, 8 admet un antécédent par f (il appartient à $]-\infty, -10[$)
4. Oui, la fonction est minorée sur $]-\infty, 10[$
5. L'équation $f(x) = 1$ admet au moins 3 solutions
6. $f(-4) > f\left(\frac{1}{2}\right)$
7. Si f atteint la valeur 10 alors 10 est un maximum (global) sinon, f n'a pas de maximum.





   - Les maximums locaux sont 2 et -1, atteints -3 et 1.
8. -2 en 0
9. La fonction f est croissante sur $[0, 1]$.
10. Non
11. Non, $f(0) = -2 \neq 4$.
12. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

$[\![1,2]\!] = \{1,2\}$

Exercice 2.

1. $E = \{\underbrace{10}_{10^1\times 1}, \underbrace{200}_{10^2\times 2}, \underbrace{3\,000}_{10^3\times 3}, \underbrace{40\,000}_{10^4\times 4}\} = \{10^k \times k, (k\in\mathbb{N}$ $1 \leq k \leq 4\}$.

$\tilde{E} = \{10^k k, \; k \in [1,4]\}$ $\qquad (10^x$ avec $x\in\mathbb{R}_+)$

2. $F = \{x \in \mathbb{R}, \; \exists a \in\{1,2\}, \exists b \in \{1,2\}, \; x = \dfrac{a}{a+b}\}$

$= \{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\}$.

$*\, a = b = 1$

$a = 1$ et $b = 2$

$*\, a = b = 2$

$a = 2$ et $b = 1$.

Exercice 3

1. Notons D_{f_1} l'ensemble de définition de f_1.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x \in D_{f_1}$ ssi $|x| \neq 0$

et $3 - e^x > 0$

ssi $x \neq 0$

et $x < \ln(3)$

Donc $D_{f_1} =]-\infty, 0[\cup]0, \ln(3)[$

(ou $]-\infty, \ln(3)[\setminus \{0\}$).

2. Notons D_{f_2} l'ensemble de définition de f_2.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x \in D_{f_2}$ ssi $x \geq 0$

et $2 - \sqrt{x} \geq 1$. $\quad 1 \geq \sqrt{x}$ ssi $1 \geq x$

ssi $x \in [0, 1]$

Donc $D_{f_2} = [0,1]$.

3. Notons D_{f_3} l'ensemble de définition de f_3.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$x \in D_{f_3}$ ssi $x \geq 1$

et $4x - x^2 > 0$

et $4x - x^2 \neq 1$

$4x - x^2 = x(4-x)$

$4x - x^2 = 1$

$x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Delta = 16 - 4 = 12$

$x_1 = \frac{4-\sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}$

$x_2 = \frac{4+\sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3}$

ssi $x \geq 1$

et $x \in]0,4[$

et $x \neq 2 - \sqrt{3} \, (< 1)$

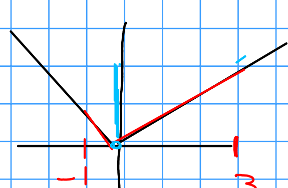
et $x \neq 2 + \sqrt{3} \, (\in [1,4])$

ssi $x \in [1,4[\setminus \{2+\sqrt{3}\}$

Donc $D_{f_3} = [1,4[\setminus \{2+\sqrt{3}\}$.

Exercice 4

1. $f_1(]-1,3]) = [0,3]$



x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$			0	$\nearrow$	3		

2. $f_2(]-2,4] \setminus \{0\}) =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup [\frac{1}{4}, +\infty[$.

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$\searrow$	$-1/2$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$1/4$	$\searrow$	0

3. $f_3(]-1,2]) = [0,4[$.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$(x-1)^2$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 5

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(x) \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad (f(x) > 0)$.

On a $\underbrace{x + \sqrt{x^2+1}}\ > x + \underbrace{\sqrt{x^2}}$ car $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante

$$= x + |x|$$

$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$, $\quad |x| = \max(x, -x) \geq -x$

Donc $x + \sqrt{x^2+1} > x + (-x) = 0$.

Donc $f(x) > 0$.

Donc f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6

1. • Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction constante vérifiant i) et ii).

Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = C$.

De i), on a $C \geqslant C + C$, donc $C \leqslant 0$.

De ii), on a $C = C^2$ donc $C = 0$ ou $C = 1$.

Donc $C = 0$.

Donc f est la fonction nulle.

• Réciproquement, la fonction nulle vérifie i) et ii).

Donc il existe une unique solution constante, la fonction nulle.

2. De i), $f(0) = f(0+0) \geqslant f(0) + f(0)$, donc $f(0) \leqslant 0$

et de ii), $f(0) = f(0 \times 0) = f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Donc $f(0) = 0$.

ou $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x \times 0) = f(0) f(x)$, si $f(0) \neq 0$

alors $f(0) = f(0) f(x)$

donc $f(x) = 1$. Absurde car f est non constante.

Donc $f(0) = 0$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, par ii)

on a $f(x) = f(x \times 1) = f(x) f(1)$. Donc $f(x)(1 - f(1)) = 0$

Or f n'est pas constante, donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$

tel que $f(x_0) \neq 0$, donc $1 - f(1) = 0$, donc $f(1) = 1$.

3. a) Par récurrence,

$$f(x^{n+1}) = f(x^n \times x) = \underbrace{f(x^n)}_{P(n)} \times f(x) = f(x)^n \times f(x) = f(x)^{n+1}.$$

b) $\underbrace{f(1)}_{=1} = f\left(x \times \frac{1}{x}\right) = f(x) \times f\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $f(x) = f(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = f(\sqrt{x})^2 > 0$

4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ tel que $x \leq y$. Montrons que $f(x) \leq f(y)$

$f(y) = f((y - x) + x)$ - - - - $\geq f(x)$.