TD 10 - Géométrie 2

$\cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

Exercice 2

Posons $P = X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$.

$= Q(X^n)$ avec $Q = X^2 - 2\cos(na)X + 1$.

Notons r_1 et r_2 les racines complexes de Q :

$$\begin{cases} r_1 \times r_2 = 1 \\ r_1 + r_2 = 2\cos(na) = e^{ina} + e^{-ina} \end{cases}$$

Prenons $r_1 = e^{ina}$ et $r_2 = e^{-ina}$.

$X^2 - 2\cos\theta\, X + 1$
$= (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$

Donc $Q = (X - e^{ina})(X - e^{-ina})$

Donc $P = (X^n - e^{ina})\underline{(X^n - e^{-ina})}$.

$= (X^n - e^{ina})\overline{(X^n - e^{ina})}$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n - e^{ina} = 0$.

Alors $z^n = e^{ina}$

$= (e^{ia})^n$

donc $\left(\dfrac{z}{e^{ia}}\right)^n = 1$

$z = re^{i\theta}$

$r^n e^{in\theta} = 1 e^{ina}$

1

$n\theta = na + 2k\pi$

$k \in \{0..n-1\}$

$\theta = a + \dfrac{2k\pi}{n}$

Donc $\dfrac{z}{e^{ia}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0..n-1\}$

Donc $z = e^{ia} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{ia + \frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0..n-1\}$.

$= 1 e^{i(a + \frac{2k\pi}{n})}$.

Donc $X^n - e^{ina} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i(a + \frac{2k\pi}{n})}\right)$ (factorisation sur $\mathbb{C}$.)

$$X^n - e^{-ina} = \overline{X^n - e^{ina}} = \overline{\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i(a + \frac{2k\pi}{n})}\right)}$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{-i(a + \frac{2k\pi}{n})}\right).$$

Donc $P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i(a+\frac{2k\pi}{n})}\right)\left(X - e^{-i(a+\frac{2k\pi}{n})}\right)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(a + \frac{2k\pi}{n}\right) X + 1\right) . \quad \text{dans } \mathbb{R}[X] .$$

Exercice 4

Rappel. Soient $(x_0, .. x_n)$ $n+1$ points distincts, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$$

Posons, pour tout $k \in \{0..n\}$, $x_k = \frac{k}{n}$. Posons $\lambda_k = \int_0^1 L_k(t)\,dt$.

Alors, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) L_k$$

Donc pour tout $t \in [0,1]$, $P(t) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) L_k(t)$

$$\text{Donc } \int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 P\left(\frac{k}{n}\right) L_k(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) \underbrace{\int_0^1 L_k(t)\,dt}_{\lambda_k} .$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P\left(\frac{k}{n}\right) .$$

Exercice 5

1. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $f(\underbrace{\lambda P + Q}_{R}) = XR' - R$

$$= X(\lambda P' + Q') - \lambda P - Q$$

$$= X\lambda P' - \lambda P + XQ' - Q$$

$$= \lambda(XP' - P) + XQ' - Q$$

$$= \lambda f(P) + f(Q) .$$

Donc f est linéaire.

(f est même un endomorphisme).

2. Déterminons $\ker f$.

. Soit $P \in \ker f$.

Donc $f(P) = 0$, donc $XP' - P = 0$.

Notons $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Alors $P' = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$,

donc $XP' = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^i + \underbrace{0 a_0 X^0}_{0} = \sum_{i=0}^{n} i a_i X^i$.

Donc $XP' - P = \sum_{i=0}^{n} i a_i X^i - \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = \sum_{i=0}^{n} i a_i X^i - a_i X^i$

$= \sum_{i=0}^{n} (i-1) a_i X^i$.

Donc $\sum_{i=0}^{n} \underbrace{(i-1) a_i}_{=0} X^i = 0$

Donc pour tout $i \in \{0..n\}$, $(i-1) a_i = 0$

donc pour tout $i \in \{0..n\}$ et $i \neq 1$, on a $i-1 \neq 0$,

donc $a_i = 0$.

Donc $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = a_1 X \in \mathrm{Vect}(X)$

Donc $\ker f \subset \mathrm{Vect}(X) = \{a_1 X, a_1 \in \mathbb{R}\}$.

. Soit $P \in \mathrm{Vect}(X)$: $P = a_1 X$.

On a $f(P) = X a_1 - a_1 X = 0$, Donc $P \in \ker f$.

Donc $\mathrm{Vect}(X) \subset \ker f$.

Donc $\ker f = \mathrm{Vect}(X)$.

$f(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

Soit $Q \in f(\mathbb{R}_n[X])$.

$Q = f(P)$ avec $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

3. a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrons que $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$,

ie $\deg(f(P)) \leq n$.

On a $f(P) = \underbrace{XP'}_{\deg d \leq n} - \underbrace{P}_{\deg d \leq n}$ est de degré $\leq n$.

Donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc $f(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

b) La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$: $(1, X, X^2, \dots X^n)$.

$$\operatorname{mat}_{B_c} g = \begin{array}{cc} \begin{matrix} g(1) & g(X) & g(X^2) & & \cdots & g(X^n) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & & n-1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \\ \vdots \\ X^n \end{matrix} \end{array}$$

(On a $g(\underset{P}{1}) = XP' - P = X \times 0 - 1 = -1$

$= \underline{-1} \times 1 + \underline{0} \times X + \underline{0} \times X^2 + \dots + \underline{0} \times X^n$

$g(X) = X \times 1 - X = 0 = 0 \times 1 + 0 \times X + \dots + 0 \times X^n$.)

Soit $i \in \{0 \dots n\}$.

On a $g(X^i) = X \times iX^{i-1} - X^i = (i-1)X^i$

$= \underline{0} \times 1 + \dots + \underline{0} \times X^{i-1} + \underline{(i-1)}X^i + \underline{0} \times X^{i+1}$

$+ \dots + \underline{0}\, X^n$.

c) $\operatorname{Im} g = g(\mathbb{R}_n[X])$

$= g(\operatorname{Vect}(1, X, X^2, \dots X^n))$ ↲ g est linéaire.

$= \operatorname{Vect}(g(1), g(X), \dots g(X^n))$

$= \operatorname{Vect}(-1, \cancel{0}, X^2, 2X^3, 3X^4, \dots, (n-1)X^n)$

$= \operatorname{Vect}(1, X^2, X^3, X^4, \dots, X^n)$

Donc $(1, X^2, X^3, \dots X^n)$ est génératrice de $\operatorname{Im} g$ et elle est libre (degrés échelonnés), c'est donc une base de $\operatorname{Im} g$.

4. $\operatorname{Im} g \neq \mathbb{R}_n[X]$ car $X \notin \operatorname{Im} g$.

ou $\dim \operatorname{Im} g = n < \dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$.

Pour f : $X \notin \operatorname{Im} f$.

5. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$(f \circ f)(P) = f(f(P)) = f(XP' - P)$

$= X(XP' - P)' - XP' + P$

$= X(P' + XP'' - P') - XP' + P$

$= XP'' - XP' + P$.

or $(f \circ f)(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i (i-1)^2 X^i$.

6. Soit $P \in \ker(f \circ f)$.

On a $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Alors $\sum_{i=0}^{n} \underbrace{a_i (i-1)^2}_{=0} X^i = 0$.

Pour tout $i \in \{0..n\}$, $a_i (i-1)^2 = 0$

donc pour tout $i \in \{0..n\}$ et $i \neq 1$, $a_i = 0$.

Donc $P = a_1 X$. Donc $\ker f \circ f \subset \mathrm{Vect}\, X$.

Réciproquement, $\mathrm{Vect}\, X \subset \ker f \circ f$.

Donc $\ker f \circ f = \mathrm{Vect}\, X$.

Exercice 1

1\. b) • $z^4 = -1 = e^{i\pi}$

$z = e^{i\theta}$

$e^{4i\theta} = e^{i\pi}$

$4\theta = \pi + 2k\pi$

avec $k \in \mathbb{Z}$

$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$,

$k \in \{0..3\}$.

d) • $z^3 = -1 = e^{i\pi}$

$\left(\frac{z}{e^{\frac{i\pi}{3}}}\right)^3 = 1.$ $\qquad z = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ $\qquad k \in \{0, 1, 2\}$.

$X^3 + 1 = (X - e^{i\pi/3})(X - e^{i\pi})(X - \underbrace{e^{5i\pi/3}}_{e^{-i\pi/3}})$

$z^3 = i = e^{i\pi/2}$ $\qquad 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ $\qquad k \in \{0, 1, 2\}$.

$X^3 - i = (X - e^{i\pi/6})(X - e^{\frac{5i\pi}{6}})(X - \underbrace{e^{i9\pi/6}}_{e^{3i\pi/2}})$

$X^3 + i = \overline{X^3 - i} = (X - e^{-i\pi/6})(X - e^{-5i\pi/6})(X - e^{-3i\pi/2})$.

$P = (X - e^{i\pi/3})(X - e^{i\pi})(X - e^{-i\pi/3})(X - e^{i\pi/6})(X - e^{5i\pi/6})(X - e^{3i\pi/2})$
$(X - e^{-i\pi/6})(X - e^{-5i\pi/6})(X - e^{-3i\pi/2})$

$= (X+1)(X^2 - 2 \times \frac{1}{2} X + 1)(X^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2} X + 1)(X^2 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} X + 1)$
$(X^2 - 2 \times 0 \quad X + 1)$

$= (X+1)(X^2 \quad + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.

2. $P(-1) = P_0(-1)$, $P(0) = P_0(0)$, $P(1) = P_0(1)$

$Q = P - P_0$: -1, 0 et 1 sont racines de Q.

Donc $X-(-1) \mid Q$, $X - 0 \mid Q$, $X - 1 \mid Q$.

$(X+1)X(X-1) \mid Q$.

Donc $Q = (X+1)X(X-1)R$ où $R \in \mathbb{K}[X]$.

Donc $P - P_0 = (X+1)X(X-1)R$,

donc $P = P_0 + (X+1)X(X-1)R$

q1.