TD 11 - Algèbre 2

Exercice 2

1. $u_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longmapsto (ax+y+z,\ x+ay+z,\ x+y+az).$$

Soient $\vec{u} = (x,y,z)$ et $\vec{v} = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $u_a(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda u_a(\vec{u}) + u_a(\vec{v})$.

On a $\lambda\vec{u} + \vec{v} = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$.

$$\begin{aligned}
u_a(\lambda\vec{u}+\vec{v}) &= u_a(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')\\
&= \big(a(\lambda x + x') + \lambda y + y' + \lambda z + z',\\
&\qquad \lambda x + x' + a(\lambda y + y') + \lambda z + z',\\
&\qquad \lambda x + x' + \lambda y + y' + a(\lambda z + z')\big)\\
&= \big(\lambda(ax + y + z) + ax' + y' + z',\\
&\qquad \lambda(x + ay + z) + x' + ay' + z',\\
&\qquad \lambda(x + y + az) + x' + y' + az'\big)\\
&= \lambda u_a(x,y,z) + u_a(x',y',z')\\
&= \lambda u_a(\vec{u}) + u_a(\vec{v}).
\end{aligned}$$

Donc u_a est linéaire (et u_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$)

2. $\mathcal{B}c = (\underbrace{(1,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{e_3})$.

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}c} u_a = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_a(e_1) & u_a(e_2) & u_a(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array}$$

$u_a(e_1) = u_a((1,0,0)) = (a,1,1) = a e_1 + 1 e_2 + 1 e_3$

$x \quad y \quad z$

$= a(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$

$u_a(e_2) = u_a((0,1,0)) = (1,a,1) = 1 e_1 + a e_2 + 1 e_3$

$u_a(e_3) = u_a((0,0,1)) = (1,1,a) = 1 e_1 + 1 e_2 + a e_3$.

3. $(\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim E$ si $f : E \to E$ endo$)$.

- $\ker u_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , u_a(x,y,z) = (0,0,0)\}$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$\ker f = \{\vec{u} \in E, f(\vec{u}) = 0_E\}$

On a $u_a(x,y,z) = (0,0,0)$

ssi $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ (a-1)y + (1-a)z = 0 \quad L_2 - L_3 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ (1-a^2)y + (1-a)z = 0 \quad L_1 - aL_2 \\ (a-1)y + (1-a)z = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ (1-a^2)y + (1-a)z = 0 \\ (2-a-a^2)y = 0 \end{cases}$

1^er^ cas : $2 - a - a^2 \neq 0$ ie $a \neq 1$ et $a \neq -2$.

$(1-a)(2+a) \neq 0$

$\to$ Si $a \neq 0$

Alors $(x,y,z) \in \ker u_a$ ssi $(x,y,z) = (0,0,0)$

ssi $\ker u_a = \{(0,0,0)\}$.

$\to$ Si $a = 0$, on a aussi $\ker u_a = \{(0,0,0)\}$.

Pas de base de $\ker u_a$. $(\dim \ker u_a = 0)$

- $\operatorname{Im} u_a = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}\right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}\right)$ est génératrice, on peut montrer qu'elle est libre (idem qu'au dessus), donc c'est une base de $\operatorname{Im} u_a$.

- 2^ème^ cas : $2 - a - a^2 = 0$, ie $a = 1$ ou $a = -2$.

  - $a = 1$.

$(x,y,z) \in \ker u_a$

ssi $\begin{cases} ax+y+z=0 \\ (1-a^2)y+(1-a)z=0 \\ (2-a-a^2)y=0 \end{cases}$ ssi $x+y+z=0$.

Donc $\ker u_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x+y+z=0\}$

$(x,y,z) \in \ker u_a$ ssi $z=-x-y$

ssi $(x,y,z)=(x,y,-x-y)$

$= x(1,0,-1)+y(0,1,-1)$

Donc $\ker u_a = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$

La famille $((1,0,-1),(0,1,-1))$ est génératrice et libre (2 vecteurs non colinéaires), donc c'est une base de $\ker u_a$.

$\mathrm{Im}\, u_a = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}, \cancel{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Im}\, u_a$.

- $a=-2$.

$(x,y,z) \in \ker u_a$

ssi $\begin{cases} ax+y+z=0 \\ (1-a^2)y+(1-a)z=0 \\ (2-a-a^2)y=0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ -3y+3z=0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases}$

$\ker u_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x=z, y=z\}$

$= \{(z,z,z), \ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. $\dim \ker u_a = 1$

Donc $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker u_a$.

- $\mathrm{Im}\, u_a = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$ $\dim \mathrm{Im}\, u_a = 2$.

$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}}\right)$

Donc la famille $\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}\right)$ est génératrice et libre (2 vecteurs non colinéaires), donc c'est une base de $\operatorname{Im} u_a$.

Si $a = 0$, $\begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} y+z=0 \\ y=x \\ x=z \end{cases}$

$$x=y=z=0.$$

Exercice 3

1. $$\begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \end{array}$$

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_c} f = M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array} \qquad \mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$(x,y,z) \in \ker f$ ssi $f(x,y,z) = (0,0,0)$

ssi $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

ssi $\begin{pmatrix} x+y-z \\ -3x-3y+3z \\ -2x-2y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

ssi $\begin{cases} x+y-z=0 \\ \cancel{-3x-3y+3z=0} \\ \cancel{-2x-2y+2z=0} \end{cases}$

Une équation cartésienne de $\ker f$ est $x+y-z=0$.

$\ker f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y-z=0\}$.

$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z=x+y\}$$
$$= \{(x,y,x+y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$
$$= \{x(1,0,1)+y(0,1,1),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$
$$= \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,1)).$$

La famille $((1,0,1),(0,1,1))$ est génératrice et libre, c'est donc une base de $\ker f$.

2. $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}}, \underbrace{\cancel{\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}}}_{=-1\times\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}\right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Im} f$.

$$\mathrm{Im} f = \{\lambda(1,-3,-2),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(\overset{x}{\lambda}, \underbrace{\overset{y}{-3\lambda}}_{-3x}, \underbrace{\overset{z}{-2\lambda}}_{-2x}),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ y=-3x \text{ et } z=-2x\}.$$

Un système d'équations cartésiennes est $\begin{cases} 3x+y=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$.

3. On cherche une base $\mathcal{B} = (u_1,u_2,u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\begin{cases} f(u_1) = u_2 = 0\times u_1 + 1u_2 + 0\times u_3 \\ f(u_2) = 0 \\ f(u_3) = 0. \end{cases} \qquad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, f = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \\ \leftarrow u_3 \end{array}$$

$u_2 \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$, $u_3 \in \ker f$, $u_1 \notin \ker f$.

On a $\ker f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Prenons $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Alors $u_1 \notin \ker f$.

Prenons $u_2 = f(u_1) = f((1,0,0)) = M \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$.

et $u_2 \in \ker f$: $\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \ker f$.

car $\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Donc $f(u_2) = 0$ et $u_2 = f(u_1)$.

Prenons $u_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Alors $u_3 \in \ker f$.

Alors $B = (u_1, u_2, u_3)$ base de $\mathbb{R}^3$ car constituée de 3 éléments et est libre :

(Si $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

alors $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$)

On a $\operatorname{mat}_B f = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \\ \leftarrow u_3 \end{array}$.

4. Posons $P = P_{Bc}^{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array}$

$P^{-1} = P_{B}^{Bc}$

On a $\operatorname{mat}_{B} f = \underset{P_{B}^{Bc}}{P^{-1}} \operatorname{mat}_{Bc} f \underset{P_{Bc}^{B}}{P}$.

Donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} P$.

Exercice 4

$E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ M \mapsto MA - A\,{}^t M \end{array}$$

Remarque : f est linéaire. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= (\lambda M + N)A + A\,{}^t(\lambda M + N) \\ &= \lambda MA + NA + A(\lambda\,{}^tM + {}^tN) \\ &= \lambda(MA + A\,{}^tM) + NA + A\,{}^tN \\ &= \lambda f(M) + f(N). \end{aligned}$$

1. Facile. $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$.

   $\mathcal{B}$ est la b.c. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(E_{11}) & f(E_{12}) & f(E_{21}) & f(E_{22}) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & -1 & -1 \\ -1 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow E_{11} \\ \leftarrow E_{12} \\ \leftarrow E_{21} \\ \leftarrow E_{22} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(E_{11}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + 1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}} - 1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}} + 0 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}} \end{aligned}$$

$$f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = aE_{12} - aE_{21}$$

$$f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1E_{12} + 1E_{21}$$

$$f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1E_{12} + E_{21}$$

3. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$M = xE_{11} + yE_{12} + zE_{21} + tE_{22}$
Les coord. de M dans $\mathcal{B}$ sont (x, y, z, t).

Alors $M \in \ker f$ ssi $f(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ssi $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & -1 & -1 \\ -1 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ssi $\begin{pmatrix} 0 \\ x + ay - z - t \\ -x - ay + z + t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ssi $\begin{cases} x + ay - z - t = 0 \\ \cancel{-x - ay + z + t = 0} \end{cases}$

ssi $x + ay - z - t = 0$,

Donc $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ x + ay - z - t = 0 \right\}$.

$= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad t = x + ay - z \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & x+ay-z \end{pmatrix}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right).$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice et libre :

(Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Alors $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + a\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$ Donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$.
)

C'est donc une base du noyau.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$: coord d'un vecteur M dans $\mathcal{B}$:

$M = 0E_{11} + 1E_{12} - 1E_{21} + 0E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}}, \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right)$

$= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$

Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

5. On a $\operatorname{Im} f \oplus \ker f = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ssi

① $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

② $\underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{=1} + \underbrace{\dim \ker f}_{3} = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4.$ ✓

Soit $M \in \operatorname{Im} f \cap \ker f$.

Alors $M = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

et $M = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_1 + a\lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix}$

Donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\lambda_3$ et $a\lambda_2 - \lambda_3 = 0$.

Donc $\lambda_3(-a-1) = 0$.

Donc si $-a-1 \neq 0$ alors $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0$.

Donc $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sinon, $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$.

Donc $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ssi $a \neq -1$.

Donc $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires ssi $a \neq -1$.

Exercice 1

1. Soit $x \in \ker f \cap \ker g$.

Alors $x \in \ker f$ et $x \in \ker g$. Donc $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.

On a $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$.

Donc $x \in \ker(f+g)$.

Donc $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$.

Soit $x \in \ker(f+g)$.

Alors $(f+g)(x) = 0$, soit $f(x) + g(x) = 0$.

Prenons $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x \end{array}$.

Alors $(f+g)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $\ker(f+g) = \mathbb{R}$.

Mais $\ker f = \{0\}$ et $\ker g = \{0\}$.

Donc $\ker f \cap \ker g = \{0\}$. Donc $\ker(f+g) \not\subset \ker f \cap \ker g$.

Par exemple, $1 \in \ker(f+g)$ et $1 \notin \ker f \cap \ker g$.

2. Soit $x \in \ker f$.

Alors $f(x) = 0$. Donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$.

Donc $x \in \ker f^2$.

Donc $\ker f \subset \ker f^2$.

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (0,x)$ $\quad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f^2 : (x,y) \mapsto (0,0)$. $\quad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c} f^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $(1,0) \notin \ker f$ car $f((1,0)) = (0,1) \neq (0,0)$

et $f^2((1,0)) = f((0,1)) = (0,0)$.

Donc $(1,0) \in \ker f^2$. Donc $\ker f^2 \not\subset \ker f$.

3. Soit $x \in \mathrm{Im}\, f^2$.

Alors il existe $y \in E$ tel que $x = f^2(y) = f(\underbrace{f(y)}_{z \in E}) \in \mathrm{Im}\, f$

Donc $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f$.

- $f : (x,y) \mapsto (0,x)$. $\quad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c} f^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

et $\mathrm{Im}\, f^2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Donc $\mathrm{Im}\, f \not\subset \mathrm{Im}\, f^2$.

4. $\Rightarrow$ Supposons que $\mathrm{Im}\, f \cap \ker f = \{0_E\}$.

On a $\ker f \subset \ker f^2$. Montrons que $\ker f^2 \subset \ker f$.

Soit $x \in \ker f^2$. Alors $f^2(x) = 0$, soit $f(f(x)) = 0$.

Donc $f(x) \in \ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$. Donc $f(x) = 0$.

Donc $x \in \ker f$.

Donc $\ker f^2 \subset \ker f$.

Donc $\ker f^2 = \ker f$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\ker f = \ker f^2$.

On a $\{0\} \subset \operatorname{Im} f \cap \ker f$.

Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \ker f$. Alors $f(x) = 0$ et $x = f(y)$

avec $y \in E$. Donc $0 = f(x) = f^2(y)$.

Donc $y \in \ker f^2 = \ker f$. Donc $f(y) = 0$.

Or $x = f(y)$. Donc $x = 0$.

Donc $\operatorname{Im} f \cap \ker f \subset \{0\}$.

Donc $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$.

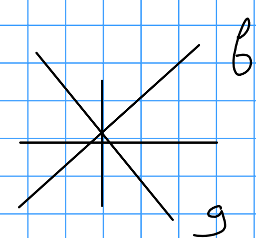
D'où le résultat.

5. · Soit $x \in \operatorname{Im}(f+g)$.

Alors $x = (f+g)(y)$ avec $y \in E$.

$= \underbrace{f(y)}_{\in \operatorname{Im} f} + \underbrace{g(y)}_{\in \operatorname{Im} g} \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.

Donc $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.



· Prenons $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}$, $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x \end{array}$.

Alors $(f+g)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc $\operatorname{Im}(f+g) = \{(f+g)(x), x \in \mathbb{R}\} = \{0\}$.

Mais $\operatorname{Im} f = \{x, x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}$

Donc $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \mathbb{R} \not\subset \operatorname{Im}(f+g) = \{0\}$.

6. $\Rightarrow$ Supposons que $E = \operatorname{Im} f + \ker f$.

On a $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.

Soit $x \in \operatorname{Im} f$. Alors $x = f(y)$ avec $y \in E$.

Or $E = \operatorname{Im} f + \ker f$. Donc il existe $y_1 \in \operatorname{Im} f$

et $y_2 \in \ker f$ tels que $y = y_1 + y_2$.

et $y_1 = f(z)$ avec $z \in E$.

Donc $y = f(z) + y_2$. Donc $x = f(y) = f(f(z) + y_2)$

f est linéaire

$= f(f(z)) + f(y_2)$

$= f^2(z) + 0$

$= f^2(z) \in \mathrm{Im} f^2$.

Donc $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$.

Donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

On a $\mathrm{Im} f + \ker f \subset E$

Soit $x \in E$. On $f(x) \in \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

Donc il existe $z \in E$ tel que $f(x) = f^2(z) = f(\underbrace{f(z)}_{y})$

Alors $f(x) - f(y) = 0$, donc $f(x-y) = 0$.

Donc $x - y \in \ker f$.

Donc $x = y + x - y = \underbrace{f(z)}_{\in \mathrm{Im} f} + \underbrace{x-y}_{\in \ker f} \in \mathrm{Im} f + \ker f$.

Donc $E \subset \mathrm{Im} f + \ker f$.

D'où $E = \mathrm{Im} f + \ker f$.

D'où le résultat.

$x = \underset{\in \mathrm{Im} f}{x_1} + \underset{\ker f}{x_2}$

$= f(z) + x_2$

$f(x) = f^2(z)$

$= f(\underbrace{f(z)}_{y})$.