Feuille de TD n° 8

Divisions euclidiennes de polynômes et racines

3 mai 2021

Exercice 1.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^5 - 3X^4 + 6X^3 + X - 1$ par $X^2 + 1$,
2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ et μ pour que le polynôme $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ soit divisible par $X^2 + 2$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
4. Soient $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

Exercice 2.

1. Trouver les racines du polynôme $X^3 - 3X^2 - 45X + 175$ en sachant qu'il possède une racine double.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la multiplicité de 1 comme racine du polynôme $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X - 1)^3$ divise $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.
4. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Démontrer que P_n admet n racines simples complexes.

Exercice 3. Déterminer les solutions $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ du système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ xyz = -4 \end{cases} .$$

Exercice 4.

1. Démontrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \sqrt[3]{n^2 + 1}$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $P(k) = \dfrac{1}{k}$. Démontrer que $P(-1) = n + 1$.

Exercice 5.

• **Version difficile, sans indication :** Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$.

• **Version détaillée :** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$.

1. Montrer que si α est racine de P alors α^2 l'est aussi.
2. En déduire que $\alpha = 0$ ou bien α est une racine de l'unité.
3. Montrer que si α est racine de P alors $\alpha - 1 = 0$ ou $|\alpha - 1| = 1$.
4. En déduire que les racines de P appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{-i\pi}{3}}\}$.
5. Montrer que 0 et 1 sont les seules racines possibles de P.
6. En déduire l'expression des polynômes P vérifiant la relation $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$.

Exercice 6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 2$.

1. Énoncer le théorème de Rolle.
2. On suppose que P possède n racines réelles distinctes.
   (a) Montrer que toutes les racines de P' sont réelles.
   (b) En déduire que le polynôme $P^2 + 1$ n'admet que des racines complexes non réelles et qu'elles sont simples.
3. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ alors P' l'est aussi.

Exercice 7 (Bonus)**.**

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X^2) = P(X-1)P(X+1).$$

Indications

Exercice 1

1. Faire l'algorithme de division euclidienne.
2. Faire l'algorithme de division euclidienne. À quelle condition sur le reste, $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ est-il divisible par $X^2 + 2$?
3. On sait que $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + aX + b$ d'après le théorème de division euclidienne. Evaluer cette relation pour des valeurs de X bien choisies...
4. Même idée que la question 3, penser à dériver la relation.

Exercice 2

1. Trouver les racines du polynôme dérivé pour trouver une racine double. Terminer par exemple par une division euclidienne.
2. Appliquer le théorème du cours sur le lien entre multiplicité et dérivées successives.
3. Même idée que la question 2, dire que $(X-1)^3$ divise un polynôme signifie que 1 est racine de multiplicité au moins 3 de ce polynôme.
4. Trouver une relation entre P_n' et P_{n-1}. En déduire qu'un élément $\alpha \in \mathbb{C}$ ne peut pas être racine de P_n et P_n' que si $\alpha = 0$, puis conclure.

Exercice 3

Utiliser les relations sur les coefficients-racines du cours pour trouver que x, y et z sont racines d'un polynôme.

Exercice 4

1. Regarder le polynôme $P^3 - X^2 - 1$: degré, nombre de racines...
2. (Plus difficile) Regarder le polynôme $XP(X) - 1$: degré, nombre de racines. En déduire une factorisation de la forme $XP(X) - 1 = \lambda \prod_{k=1}^{n+1}(X-k)$. Evaluer cette relation pour une valeur de X bien choisie pour trouver λ et en déduire $P(-1)$.

Exercice 5

1. Facile.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est racine de P puis conclure en utilisant un argument sur le nombre de racines et le degré du polynôme.
3. Facile.
4. Montrer que $(\alpha - 1)^2$ est racine de P puis utiliser la question 2.
5. Si $e^{\frac{i\pi}{3}}$ est racine, son carré l'est aussi... Donc ?
6. P s'écrit $P = \lambda X^k (X-1)^l$. Remplacer dans la relation pour obtenir k et l.

Exercice 6

1. Cours d'analyse.
2. (a) Appliquer le théorème de Rolle entre deux racines consécutives de P.
   (b) Justifier que les racines de $P^2 + 1$ ne peuvent pas être réelles.
   Justifier que les racines de la dérivée de $P^2 + 1$ sont réelles.
   Conclure.
3. Utiliser à nouveau le théorème de Rolle en prenant en compte la multiplicité des racines.