Corrigé du TD n° 8

Divisions euclidiennes de polynômes et racines

5 mai 2021

Exercice 1.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^5 - 3X^4 + 6X^3 + X - 1$ par $X^2 + 1$,
2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ et μ pour que le polynôme $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ soit divisible par $X^2 + 2$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
4. Soient $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

---

1. $X^5 - 3X^4 + 6X^3 + X - 1 = (X^3 - 3X^2 + 5X + 3)(X^2 + 1) - 4X - 4$.
2. On a $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2 = (X^2 + 2)(X^2 + X + \lambda - 2) + (\mu - 2)X + 6 - 2\lambda$. Le polynôme $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ est donc divisible par $X^2 + 2$ si et seulement si $(\mu - 2)X + 6 - 2\lambda = 0$, soit si et seulement si $\mu = 2$ et $\lambda = 3$.
3. D'après le théorème de division euclidienne, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + aX + b.$$
Comme $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$, en évaluant en 1 et en 2, on obtient $2^n = 2a + b$ et $1 = a + b$. Donc $a = 2^n - 1$ et $b = 2 - 2^n$.
Le reste est donc $(2^n - 1)X + 2 - 2^n$.
4. D'après le théorème de division euclidienne, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$P = (X - a)^2 Q + \lambda X + \mu.$$
En évaluant en a, on obtient $P(a) = \lambda a + \mu$.
En dérivant la relation, on a $P' = 2(X - a)Q + (X - a)^2 Q' + \lambda$.
En évaluant à nouveau en a, on obtient $P'(a) = \lambda$.
D'où $\lambda = P'(a)$ et $\mu = P(a) - aP'(a)$.
Le reste est donc $P'(a)X + P(a) - aP'(a)$.

Exercice 2.

1. Trouver les racines du polynôme $X^3 - 3X^2 - 45X + 175$ en sachant qu'il possède une racine double.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la multiplicité de 1 comme racine du polynôme $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X - 1)^3$ divise $nX^{n+2} - (n + 2)X^{n+1} + (n + 2)X - n$.
4. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Démontrer que P_n admet n racines simples complexes.

---

1. Posons $P = X^3 - 3X^2 - 45X + 175$. On a $P' = 3X^2 - 6X - 45$. Les racines de ce polynôme sont donc :
$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{64}}{2} = 5 \text{ et } x_2 = \frac{2 - \sqrt{64}}{2} = -3$$
Or on peut vérifier que 5 est racine de P (3 ne l'est pas). Donc 5 est une racine de multiplicité au moins 2. D'où $(X - 5)^2$ divise P :
$$\begin{array}{cccc|ccc} X^3 & -3X^2 & -45X & +175 & X^2 & -10X & 25 \\ \cline{5-7} & 7X^2 & -70X & +175 & & X & +7 \\ & & & 0 & & & \end{array}$$
Donc $P = (X - 5)^2(X + 7)$. Donc les racines de P sont 5 avec une multiplicité 2 et -7 en racine simple.

2. Posons $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$. On a $P(1) = 0$, donc 1 est racine de P.
   Calculons P' : $P' = n(n+1)X^n - (n+1)nX^{n-1}$. Donc $P'(1) = 0$.
   Calculons P'' : si $n = 1$, $P'' = n^2(n+1)$ et $P''(1) \neq 0$, sinon $P'' = n^2(n+1)X^{n-1} - n(n+1)(n-1)X^{n-2}$. Donc $P''(1) = n(n+1) \neq 0$.
   Donc 1 est racine de P multiplicité 2.
3. Posons $P = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n-2)X - n$. On a $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$, donc 1 est racine de P de multiplicité supérieure ou égale à 3. Donc $(X-1)^3$ divise P.
4. Pour $n = 0$, $P_0 = 1$ n'admet pas de racines complexes.
   Pour $n = 1$, $P_1 = 1 + X$ et -1 est racine simple de P.
   Soit $n \geq 2$. On a $P_n' = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k-1)!} X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{k!} X^k = P_{n-1}$.
   On en déduit que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P_n de multiplicité au moins 2, alors $P_n(\alpha) = 0$ et $P_n'(\alpha) = P_{n-1}(\alpha) = 0$.
   Or $P_n = P_{n-1} + \dfrac{X^n}{n!}$. Donc $0 = 0 + \dfrac{\alpha^n}{n!}$. Donc $\alpha = 0$. Mais $P_n(0) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{0^k}{k!} = 1 \neq 0$. Ceci est absurde.
   Donc les racines de P_n sont simples.

Exercice 3. Déterminer les solutions $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ du système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ xyz = -4 \end{cases}.$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ une solution du système.

Alors $\sigma_1 = x + y + z = 1$, $\sigma_3 = xyz = -4$ et $\sigma_2 = xy + yz + xz = xyz\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = -4$.

Donc x, y et z sont les racines du polynôme $P = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3 = X^3 - X^2 - 4X + 4$.

1 est racine évidente de P, donc $X - 1$ divise P et par division euclidienne, on obtient $P = (X-1)(X^2-4)$.

Donc $P = (X-1)(X-2)(X+2)$.

Donc $(x, y, z) \in \{(1, 2, -2), (2, 1, -2), (1, -2, 2), (-2, 2, 1), (2, -2, 1), (-2, 1, 2)\}$.

Réciproquement, ces triplets sont bien solutions.

Exercice 4.

1. Démontrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \sqrt[3]{n^2+1}$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $P(k) = \dfrac{1}{k}$. Démontrer que $P(-1) = n + 1$.

---

1. Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \sqrt[3]{n^2+1}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n est racine du polynôme $Q = P^3 - X^2 - 1$. Donc le polynôme Q admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. Donc $P^3 = X^2 + 1$. Comme P ne peut pas être nul, on obtient $3\deg(P) = 2$, ce qui est impossible car $\deg(P) \in \mathbb{N}$.
   Donc il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \sqrt[3]{n^2+1}$.
2. Posons $Q = XP - 1$. Alors, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $Q(k) = kP(k) - 1 = 0$. Le polynôme Q admet donc au moins $n+1$ racines distinctes. Comme $\deg(P) = n$, Q est de degré $n+1$, il admet donc au plus $n+1$ racines. On en déduit que Q admet exactement $n+1$ racines, les entiers $k \in \{1, \dots, n+1\}$.
   Donc $Q = \lambda \prod_{k=1}^{n+1}(X-k)$, soit $XP = 1 + \lambda \prod_{k=1}^{n+1}(X-k)$.
   En évaluant cette relation en 0, on obtient $0 = 1 + \lambda \prod_{k=1}^{n+1}(-k) = 1 + \lambda(-1)^{n+1}(n+1)!$. D'où, $\lambda = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$.
   Donc $XP = 1 + \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n+1}(X-k)$.

En évaluant cette relation en -1, on obtient alors

$$\begin{aligned}
-P(-1) &= 1 + \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n+1} (-1-k) \\
&= 1 + \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (-1)^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} (1+k) \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!} (n+2)! \\
&= 1 - (n+2) \\
&= -n-1.
\end{aligned}$$

D'où $P(-1) = n+1$.

Exercice 5.

- **Version difficile, sans indication :** Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
- **Version détaillée :** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
  1. Montrer que si α est racine de P alors α^2 l'est aussi.
  2. En déduire que $\alpha = 0$ ou bien α est une racine de l'unité.
  3. Montrer que si α est racine de P alors $\alpha - 1 = 0$ ou $|\alpha - 1| = 1$.
  4. En déduire que les racines de P appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}, \mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{3}}\}$.
  5. Montrer que 0 et 1 sont les seules racines possibles de P.
  6. En déduire l'expression des polynômes P vérifiant la relation $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

---

1. Supposons $\alpha \in \mathbb{C}$ racine de P. Alors $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha+1) = 0$ car $P(\alpha) = 0$. Donc α^2 est racine de P.
2. On en déduit que $(\alpha^2)^2 = \alpha^4$ est racine de P, puis $(\alpha^4)^2 = \alpha^8$ aussi, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est racine de P.
   Or P étant non nul, il admet un nombre fini de racines. Donc l'ensemble $\{\alpha^{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$ est fini. Donc soit $\alpha = 0$, soit il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^{2^n} = 1$ et α est une racine de l'unité.
3. Supposons α racine de P. Alors $P((\alpha-1)^2) = P(\alpha-1)P(\alpha) = 0$ car $P(\alpha) = 0$. Donc $(\alpha-1)^2$ est racine de P. De la question précédente, on en déduit que $(\alpha-1)^2 = 0$ ou $(\alpha-1)^2$ est une racine de l'unité.
   Donc $\alpha = 1$ ou $|\alpha - 1| = 1$.
4. Soit α une racine de P non nulle et différente de 1. Notons $\alpha = a + ib$. Alors $|\alpha| = |\alpha - 1| = 1$, donc $a^2 + b^2 = (a-1)^2 + b^2$ et $a^2 + b^2 = 1$. Donc $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\alpha = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}$ ou $\alpha = \mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{3}}$.
   D'où le résultat.
5. Si $\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}$ était racine de P alors son carré, $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$, le serait aussi d'après la question 1. Or ce nombre complexe n'appartient pas à l'ensemble des racines possibles. Ce n'est donc pas une racine. De même, $\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{3}}$ n'est pas racine de P.
   De la question précédente, on en déduit que 0 et 1 sont les seules racines possibles de P.
6. Le polynôme P étant scindé sur $\mathbb{C}$, P s'écrit donc sous la forme
   $$P = \lambda X^r (X-1)^s.$$
   En remplaçant dans la relation $P(X^2) = P(X)P(X+1)$, on obtient
   $$\lambda X^{2r}(X^2-1)^s = \lambda^2 X^{r+s}(X-1)^s(X+1)^r.$$
   Donc $\begin{cases} \lambda = \lambda^2 \\ 2r = r+s \\ r = s \end{cases}$.
   Remarque : Une méthode rapide est d'utiliser l'unicité de la décomposition en produit de facteurs irréductibles, voir Cours 10, avec $(X^2-1)^s = (X-1)^s(X+1)^s$ et identifier les puissances par unicité de la décomposition.
   Donc $\lambda = 1$ et $r = s$. Donc $P = (X(X-1))^r$.
   Réciproquement, ce polynôme vérifie la relation de l'énoncé.

Exercice 6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 2$.

1. Énoncer le théorème de Rolle.
2. On suppose que P possède n racines réelles distinctes.

(a) Montrer que toutes les racines de P' sont réelles.

(b) En déduire que le polynôme $P^2 + 1$ n'admet que des racines complexes non réelles et qu'elles sont simples.

3. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ alors P' l'est aussi.

---

1. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. (a) Si P possède racines n racines distinctes deux à deux $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - x_k).$$

D'après le théorème de Rolle, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, il existe $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$. Donc P' est possède au moins $n-1$ racines réelles distinctes deux à deux. Comme P' est de degré $n-1$, il possède au plus $n-1$ racines. Donc les racines de P' sont exactement c_1, …, c_{n-1}, qui sont réelles.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P^2(x) + 1 > 0$. Donc les racines de P ne sont pas réelles.
Regardons la multiplicité des racines. La dérivée de $Q = P^2 + a^2$ est $Q' = 2P'P$. Or d'après la question précédente le polynôme P' est scindé dans $\mathbb{R}$ ainsi que P par hypothèse. Donc toutes les racines de $2P'P$ sont réelles. Donc Q et Q' n'ont pas de racines communes. Donc toutes les racines de $P^2 + 1$ sont simples et non réelles.

3. Supposons P scindé sur $\mathbb{R}$. On note $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ les racines deux à deux distinctes de P, de multiplicité n_1, …, n_k. Le polynôme P est donc de la forme :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{n_i}.$$

D'après le théorème de Rolle, pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, il existe $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$. De plus, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, x_i est une racine d'ordre $n_i - 1$ de P'. Donc en comptant avec multiplicité les racines on obtient :

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) + k - 1 = n - k + k - 1 = n - 1$$

Le nombre de racines réelles de P' est donc égal à son degré. Donc le polynôme P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 (Bonus)**.**

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X^2) = P(X-1)P(X+1).$$

Soit z une racine de P. L'équation vérifiée par P s'écrit aussi $P\big((X+1)^2\big) = P(X)P(X+2)$, et donc $(z+1)^2$ est aussi racine de P. De même, $(z-1)^2$ est aussi racine de P. On va prouver qu'au moins un des deux nombres complexes $(z+1)^2$ ou $(z-1)^2$ est de module supérieur strict à z. En effet, $(z+1)^2 - (z-1)^2 = 4z$, et donc

$$4|z| \leq |z+1|^2 + |z-1|^2.$$

Ainsi, l'un de ces deux nombres complexes est de module supérieur ou égal à $2|z|$. Si $|z| \neq 0$, le résultat est prouvé. Sinon, si $z = 0$, le résultat est trivial.

Si P admet une racine (complexe), alors, d'après ce qui précède, il en admet une infinité. C'est donc le polynôme nul.

Les polynômes qui sont solutions de l'équation ne peuvent donc être que des polynômes constants, et les seuls polynômes constants solutions sont les polynômes $P(X) = 0$ et $P(X) = 1$.