Feuille de TD n° 10

Primitives et fonctions usuelles

11 mai 2021

Exercice 1. Calculer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \longmapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2}$,
2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^4}$,
3. $f_3 : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-3x^2}$,
4. $f_4 : x \longmapsto \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$,
5. $f_5 : x \longmapsto \dfrac{1}{\tan(x)}$,
6. $f_6 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$,
7. $f_7 : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Exercice 2. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$,

$$x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes :

1. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$,
2. $2^{x^3} = 3^{x^2}$,
3. $2^x + 2^{x+1} + \ldots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \ldots + 3^{x+n}$, où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Soit $p \in]0,1]$.

1. Démontrer que pour tout $t \geq 0$, $(1+t)^p \leq 1 + t^p$.
2. En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $(x+y)^p \leq x^p + y^p$.

Exercice 5 (Inégalité de Hölder)**.**

1. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur I. Montrer que si f' est croissante alors, pour tout $(x,y) \in I^2$ et tout $t \in [0,1]$,
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et tout $t \in [0,1]$,
$$\ln(tx + (1-t)y) \geq t\ln(x) + (1-t)\ln(y).$$
3. Soit $(p,q) \in [1,+\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(a_1,\ldots,a_n)$ et $(b_1,\ldots,b_n)$ deux éléments non nuls de $\mathbb{R}^n$. On pose
$$\|a\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \|b\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
   (a) Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, $ab \leq \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$.

   (b) Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,
$$\frac{|a_ib_i|}{\|a\|_p\|b\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|a_i|^p}{\|a\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|b_i|^q}{\|b\|_q^q}.$$
   (c) En déduire que
$$\sum_{i=1}^n |a_ib_i| \leq \|a\|_p\|b\|_q.$$

Exercice 6 (Bonus : entraînement)**.** Corriger les erreurs :

Considérons la fonction $f : x \longmapsto (\ln(\mathrm{e}^x - 2))^\pi$. Notons $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si $\mathrm{e}^x - 2 > 0$, soit si et seulement si $x > \ln(2)$. Donc $\mathcal{D}_f =]\ln(2), +\infty[$.
La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 2$ est dérivable sur $]\ln(2), +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \longmapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, $x \longmapsto \ln(\mathrm{e}^x - 2)$ est dérivable sur $]\ln(2), +\infty[$. On en déduit que f est dérivable sur $]\ln(2), +\infty[$ et pour tout $x \in]\ln(2), +\infty[$,

$$f'(x) = \pi \times \frac{1}{\mathrm{e}^x - 2} \times (\ln(\mathrm{e}^x - 2))^{\pi - 1}.$$