Corrigé du TD n° 10

Primitives et fonctions usuelles

14 mai 2021

Exercice 1. Calculer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \longmapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2}$,
2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^4}$,
3. $f_3 : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-3x^2}$,
4. $f_4 : x \longmapsto \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$,
5. $f_5 : x \longmapsto \dfrac{1}{\tan(x)}$,
6. $f_6 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$,
7. $f_7 : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.

---

1. $F_1 : x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2x+1}$, (de la forme $u'(x)u(x)^{-2}$)
2. $F_2 : x \longmapsto -\dfrac{1}{3\ln(x)^3}$, (de la forme $u'(x)u(x)^{-4}$)
3. $F_3 : x \longmapsto -\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-3x^2}$, (de la forme $u'(x)\exp(u(x))$)
4. $F_4 : x \longmapsto 2\sin(\sqrt{x})$, (de la forme $u'(x)\cos(u(x))$)
5. $F_5 : x \longmapsto \ln(|\sin(x)|)$, (de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ car $f_3(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$)
6. $F_6 : x \longmapsto \ln(\mathrm{e}^x+1)$, (de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$)
7. $F_7 : x \longmapsto \dfrac{3}{2}(x-1)^{2/3}$ (de la forme $u'(x)u(x)^{-1/3}$).

Exercice 2. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$,

$$x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

Posons, pour tout $x \in]0,1[$, $\varphi : x \longmapsto x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$. Alors $x^x(1-x)^{1-x} = \exp(\varphi(x))$.

La fonction φ est dérivable sur $]0,1[$ et $\varphi'(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

Donc $\varphi'(x) \geq 0$ si et seulement si $\dfrac{x}{1-x} \geq 0$, soit si et seulement si $x \geq \dfrac{1}{2}$.

Donc φ est décroissante sur $]0,1/2]$ puis croissante sur $[1/2,1[$.

Donc pour tout $x \in]0,1[$, $\varphi(x) \geq \varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Par croissance de l'exponentielle, on a donc, pour tout $x \in]0,1[$, $\exp(\varphi(x)) \geq \dfrac{1}{2}$.

D'où le résultat.

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes :

1. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$,

2. $2^{x^3} = 3^{x^2}$,

3. $2^x + 2^{x+1} + \ldots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \ldots + 3^{x+n}$, où $n \in \mathbb{N}$.

---

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x &\Rightarrow \sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x}) \\ &\Rightarrow \sqrt{x}\ln(x) - \frac{x}{2}\ln(x) = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)\ln(x) = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{x} = 0 \text{ ou } 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} = 0 \text{ ou } \ln(x) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie que seuls les nombres 1 et 4 sont solutions.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{1, 4\}$.

2.

$$\begin{aligned} 2^{x^3} = 3^{x^2} &\Rightarrow x^3\ln(2) = x^2\ln(3) \\ &\Rightarrow x^2(x\ln(2) - \ln(3)) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}. \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie que ces nombres sont solutions.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \left\{0, \frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right\}$.

3.

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{x+1} + \ldots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \ldots + 3^{x+n} &\Rightarrow 2^x(1 + 2 + \ldots + 2^n) = 3^x(1 + 3 + \ldots + 3^n) \\ &\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{\frac{1-2^{n+1}}{1-2}}{\frac{1-3^{n+1}}{1-3}} = 2\frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1} \\ &\Rightarrow x = \frac{\ln\left(2\frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \end{aligned}$$

Réciproquement, ce nombre est bien solution.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \left\{\frac{\ln\left(2\frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right\}$.

Exercice 4. Soit $p \in]0, 1]$.

1. Démontrer que pour tout $t \geq 0$, $(1+t)^p \leq 1 + t^p$.
2. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $(x+y)^p \leq x^p + y^p$.

---

1. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi : t \longmapsto 1 + t^p - (1+t)^p$. Alors φ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a $\varphi(0) = 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\varphi'(t) = p(t^{p-1} - (1+t)^{p-1}).$$
Puisque $p - 1 \leq 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t^{p-1} \geq (1+t)^{p-1}$ et donc $\varphi'(t) \geq 0$.
La fonction φ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Donc, pour tout $t \geq 0$, $\varphi(t) \geq 0$.
2. Pour $x = 0$, l'inégalité est immédiate.
Soit $x > 0$.
$$(x+y)^p = x^p\left(1 + \frac{y}{x}\right)^p \leq x^p\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^p\right) = x^p + y^p.$$

Exercice 5 (Inégalité de Hölder)**.**

1. Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur I. Montrer que si f' est croissante alors, pour tout $(x, y) \in I^2$ et tout $t \in [0, 1]$,
$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y).$$
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et tout $t \in [0, 1]$,
$$\ln(tx + (1-t)y) \ge t\ln(x) + (1-t)\ln(y).$$
3. Soit $(p, q) \in [1, +\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   (a) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, $ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul. On pose $||a||_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $||b||_q = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

   (b) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,
$$\frac{|a_i b_i|}{||a||_p ||b||_q} \le \frac{1}{p}\frac{|a_i|^p}{||a||_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|b_i|^q}{||b||_q^q}.$$
   (c) En déduire que
$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \le ||a||_p ||b||_q.$$

---

1. Supposons f' croissante. Soient $y \in I$ et $t \in [0, 1]$.
Posons, pour tout $x \in I$,
$$g(x) = f(tx + (1-t)y) - tf(x) + (1-t)f(y).$$
La fonction g est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
$$g'(x) = tf'(tx + (1-t)y) - tf'(x) = t(f'(tx + (1-t)y) - f'(x)).$$
Si $x \le y$ alors $tx + (1-t)y \ge y$ et puisque f' est croissante, $g'(x) \ge 0$.
Si $x \ge y$ alors $tx + (1-t)y \le y$ et puisque f' est croissante, $g'(x) \le 0$.
Des variations de g, on en déduit que g admet un maximum en y qui vaut $g(y) = 0$.
Donc, pour tout $x \in I$, $g(x) \le 0$.
D'où, pour tout $x \in I$,
$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y).$$
2. La fonction $f = -\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ donc f' est croissante.
D'après la question précédente, on en déduit que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et tout $t \in [0, 1]$,
$$-\ln(tx + (1-t)y) \le -t\ln(x) - (1-t)\ln(y),$$
soit finalement
$$\ln(tx + (1-t)y) \ge t\ln(x) + (1-t)\ln(y).$$
3. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$.
   Posons $x = a^p$, $y = b^q$ et $t = \dfrac{1}{p}$.
   D'après l'inégalité précédente, on a
$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right)b^q\right) \ge \frac{1}{p}\ln(a^p) + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\ln(b^q),$$
   soit
$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \ge \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$
   Par croissance de la fonction exponentielle, on a donc
$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \ge ab.$$
   D'où le résultat.

(b) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$.

En appliquant le résultat précédent avec $a = \dfrac{|a_i|}{\|a\|_p}$ et $b = \dfrac{|b_i|}{\|b\|_q}$, on obtient l'inégalité demandée.

(c) En sommant pour $i = 1 \ldots n$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i b_i|}{\|a\|_p \|b\|_q} \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|^p}{\|a\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} \frac{|b_i|^q}{\|b\|_q^q},$$

soit

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|}{\|a\|_p \|b\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \|a\|_p \|b\|_q .$$

Exercice 6 (Bonus : entraînement)**.** Corriger les erreurs :

Considérons la fonction $f : x \longmapsto (\ln(\mathrm{e}^x - 2))^\pi$. Notons $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si $\mathrm{e}^x - 2 > 0$, soit si et seulement si $x > \ln(2)$. Donc $\mathcal{D}_f =]\ln(2), +\infty[$. La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 2$ est dérivable sur $]\ln(2), +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \longmapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, $x \longmapsto \ln(\mathrm{e}^x - 2)$ est dérivable sur $]\ln(2), +\infty[$. On en déduit que f est dérivable sur $]\ln(2), +\infty[$ et pour tout $x \in]\ln(2), +\infty[$,

$$f'(x) = \pi \times \frac{1}{\mathrm{e}^x - 2} \times (\ln(\mathrm{e}^x - 2))^{\pi - 1} .$$

La fonction $x \longmapsto x^\pi$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $x \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si $\mathrm{e}^x - 2 > 1$, soit $x \in]\ln(3), +\infty[$.

On obtient donc finalement « La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 2$ est dérivable sur $]\ln(3), +\infty[$ à valeurs dans $]1, +\infty[$ et $x \longmapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]1, +\infty[$, donc par composition, $x \longmapsto \ln(\mathrm{e}^x - 2)$ est dérivable sur $]\ln(3), +\infty[$. On en déduit que f est dérivable sur $]\ln(3), +\infty[$ »

La dérivée de $x \longmapsto \ln(\mathrm{e}^x - 2)$ est $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 2}$, donc pour tout $x \in]\ln(3), +\infty[$,

$$f'(x) = \pi \times \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 2} \times (\ln(\mathrm{e}^x - 2))^{\pi - 1} .$$