TD 10 . Sciences Maths

Exercice 3

$x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}$

$\Leftrightarrow \exp(\sqrt{x}\ \ln x) = \exp(x \ln(\sqrt{x}))$ — exp est strictement croissante.

$\Leftrightarrow \sqrt{x}\ \ln(x) = x \ln(\sqrt{x})$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}\ \ln(x) - \frac{1}{2} x \ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}\ (1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}) \ln x = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x = 0}$, $x = 1$ et $x = 4$.

$S = \{1, 4\}$.

2. $2^{x^3} = 3^{x^2}$

$\Leftrightarrow \exp(x^3 \ln 2) = \exp(x^2 \ln(3))$

$\Leftrightarrow x^3 \ln 2 = x^2 \ln(3)$

$\Leftrightarrow x^2 (x \ln 2 - \ln(3)) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{\ln(3)}{\ln 2}$.

$S = \{0, \dfrac{\ln 3}{\ln 2}\}$.

3. $2^x + 2^{x+1} + \dots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \dots + 3^{x+n}$.

$\Leftrightarrow 2^x (1 + 2 + \dots + 2^n) = 3^x (1 + 3 + \dots + 3^n)$

$\Leftrightarrow 2^x \dfrac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 3^x \dfrac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\dfrac{2^x}{3^x}}_{\left(\frac{2}{3}\right)^x} = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2(2^{n+1} - 1)}$

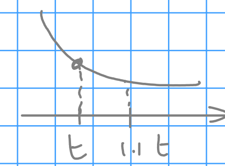
$\Leftrightarrow \exp\left(x \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2(2^{n+1} - 1)}$.

$\Leftrightarrow x \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\dfrac{3^{n+1} - 1}{2(2^{n+1} - 1)}\right)$

$$\iff \quad x = \frac{\ln\left(\frac{3^{n+1}-1}{2(2^{n+1}-1)}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

<u>**Exercice 4**</u> $\quad p \in]0,1] \quad p-1<0 \quad \cancel{t^{p-1} \leq 1}$

1. Posons $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto (1+t)^p - 1 - t^p$.



Montrons que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) \leq 0$.

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,

$(1+t)^{p-1} \leq t^{p-1}$

et
$$g'(t) = p(1+t)^{p-1} - p\,t^{p-1}$$
$$= p\left((1+t)^{p-1} - t^{p-1}\right)$$

On a $p-1<0$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$g'(t) \leq 0$$

t	0		$+\infty$
$g(t)$	0	$\searrow$	

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\quad g(t) \leq 0$.

Donc $(1+t)^p \leq 1 + t^p$.

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$.

Si $x \neq 0$,
$$(x+y)^p = \underbrace{x^p}_{\geqslant 0} \underbrace{\left(1 + \frac{y}{x}\right)^p}_{\leq 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^p} \leq x^p\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^p\right) = x^p + y^p.$$

Si $x = 0$, on a bien $(x+y)^p = y^p \leq x^p + y^p$.

Donc dans tous les cas, $(x+y)^p \leq x^p + y^p$.

Exercice 5

1. Soit $y \in I$ et $t \in [0,1]$. $f \circ h(x)$ où $h(x) = tx + (1-t)y$

$h'(x) = t$.

Posons $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \underbrace{f(tx+(1-t)y)} - tf(x) - (1-t)f(y)$

Montrons que pour tout $x \in I$, $g(x) \leq 0$.

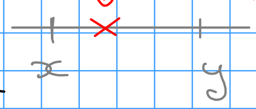
La fonction g est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = tf'(tx+(1-t)y) - tf'(x) = \underbrace{t}_{\geq 0}\left(f'(tx+(1-t)y) - f'(x)\right)$$

Si $x \leq y$ alors $tx + (1-t)y \geq x$

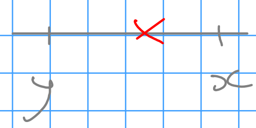
donc $g'(x) \geq 0$ car f' est croissante

$tx+(1-t)y \in [x,y]$



Si $x \geq y$ alors $tx + (1-t)y \leq x$

donc $g'(x) \leq 0$



$I = |\alpha, \beta|$

x	α		y		β
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

On a $g(y) = f(\underbrace{ty + (1-t)y}_{y}) - tf(y) - (1-t)f(y) = 0$

Donc pour tout $x \in I$, $g(x) \leq 0$

Donc $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ pour tout $x \in I$.

D'où le résultat.

2. $\left(\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \text{ donc } \ln' \text{ est décroissante.}\right)$

Posons $f : \underset{I = \mathbb{R}_+^*}{} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -\ln(x)$. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

Donc f' est croissante.

D'après la q1, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et tout $t \in [0,1]$,

$$-\ln(tx + (1-t)y) \leq -t\ln(x) - (1-t)\ln(y)$$

Donc $\ln(tx + (1-t)y) \geq t\ln(x) + (1-t)\ln(y)$.

3. a) Utilisons la question 2, avec $t = \frac{1}{p} \in [0,1]$ $x = a^p \in \mathbb{R}_+$ et $y = b^q \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\ln\left(\frac{1}{p} a^p + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{p}\right)}_{\frac{1}{q}} b^q\right) \geq \underbrace{\frac{1}{p}\ln(a^p)}_{\ln(a)} + \underbrace{\underbrace{\left(1 - \frac{1}{p}\right)}_{\frac{1}{q}}\ln(b^q)}_{\ln(b)}$$

$$= \ln(ab).$$

Donc $\| \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \geq ab$ car exp est croissante.

b) Soit $i \in \{1..n\}$.

Appliquons la q 3 a) avec $a = \frac{|a_i|}{\|a\|_p}$ et $b = \frac{|b_i|}{\|b\|_q}$ $\neq 0$ $\neq 0$

Donc $\frac{|a_i b_i|}{\|a\|_p \|b\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|a_i|^p}{\|a\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|b_i|^q}{\|b\|_q^q}$.

c) $$\sum_{i=1}^n \frac{|a_i b_i|}{\|a\|_p \|b\|_q} \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^p}{\|a\|_p^p} + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^n \frac{|b_i|^q}{\|b\|_q^q}$$

$$\frac{1}{\|a\|_p \|b\|_q}\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \frac{1}{p} \times \frac{1}{\|a\|_p^p}\|a\|_p^p + \frac{1}{q} \times \frac{1}{\|b\|_q^q}\|b\|_q^q$$

>0

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Donc $\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \|a\|_p \|b\|_q$.

$g : x \mapsto \underbrace{x^{\pi}}_{\exp(\pi \ln x)}$ $\qquad D_g = \underline{\underline{\mathbb{R}_+^*}}$.

Exercice 2

$$x^x (1-x)^{1-x} = \exp(x \ln x) \exp((1-x)\ln(1-x))$$
$$= \exp(\underbrace{x \ln x + (1-x)\ln(1-x)}_{\varphi(x)})$$

Montrer que $\exp(\varphi(x)) \geq \frac{1}{2}$

$$\iff \varphi(x) \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Calculer φ', dresser un tableau de variations.