Corrigé du TD n° 11

Nombres complexes : Écriture algébrique, conjugué et module

21 mai 2021

Exercice 1.

1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

   (a) $\dfrac{2+3i}{3-2i}$, | (b) $\dfrac{2-i}{3-7i}$,

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(3+i)z+(2-3i)\overline{z}=2i$.

---

1. (a) $\dfrac{2+3i}{3-2i}=\dfrac{(2+3i)(3+2i)}{13}=\dfrac{13i}{13}=i$.

   (b) $\dfrac{2-i}{3-7i}=\dfrac{(2-i)(3+7i)}{58}=\dfrac{13+11i}{58}$

2. Soit $z\in\mathbb{C}$. On pose $z=a+ib$, avec a et $b\in\mathbb{R}$. Par identification, on obtient les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
(3+i)z+(2-3i)\overline{z}=2i &\Leftrightarrow (3+i)(a+ib)+(2-3i)(a-ib)=2i\\
&\Leftrightarrow (3a-b)+i(a+3b)+(2a-3b)+i(-3a-2b)=2i\\
&\Leftrightarrow (3a-b+2a-3b)+i(a+3b-3a-2b)=2i\\
&\Leftrightarrow 5a-4b+i(-2a+b)=2i\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 5a-4b &= 0\\ -2a+b &= 2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 5a-4(2+2a) &= 0\\ b &= 2+2a\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -3a &= 8\\ b &= 2+2a\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a &= -\frac{8}{3}\\ b &= 2-\frac{16}{3}\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a &= -\frac{8}{3}\\ b &= -\frac{10}{3}\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $z=-\frac{8}{3}-\frac{10}{3}i$ est l'unique solution de l'équation.

Exercice 2.

1. Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, le point d'affixe $\dfrac{2}{1+it}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1.
2. Soient $P=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$ et $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$. Montrer pour tout $z\in P$, $\dfrac{z-i}{z+i}\in D$.
3. Soit z un nombre complexe différent de 1 et de module 1. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z différents de 1 tels que $\dfrac{1+z}{1-z}$ est un nombre réel.
5. Soit $a\in\mathbb{C}$ tel que $|a|<1$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|\leq 1$.

---

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a
$$\left|\frac{2}{1+it}-1\right| = \left|\frac{2-(1+it)}{1+it}\right| = \left|\frac{1-it}{1+it}\right| = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = 1.$$
Donc le point d'affixe $\dfrac{2}{1+it}$ appartient au cercle de centre 1 (ou $(1,0)$ dans le plan complexe) et de rayon 1.
2. Soit $z \in P$. On note $z = x+iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. On a
$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \left|\frac{x+i(1-y)}{x+i(1+y)}\right| = \frac{\sqrt{x^2+(1-y)^2}}{\sqrt{x^2+(1+y)^2}} < 1,$$
car comme $y > 0$, $(1-y)^2 = 1-2y+y^2 < 1+2y+y^2 = (1+y)^2$, donc $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| < 1$.
Donc $\dfrac{z-1}{z+1} \in D$.
3. On a
$$\overline{\frac{z+1}{z-1}} = \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = \frac{z\overline{z}+z}{z\overline{z}-z} = \frac{1+z}{1-z} = -\frac{z+1}{z-1}.$$
Donc $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.
4. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. Posons $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$.
Alors
$$\begin{aligned} Z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow Z = \overline{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} \\ &\Leftrightarrow (1+z)(1-\overline{z}) = (1-z)(1+\overline{z}) \\ &\Leftrightarrow z-\overline{z} = \overline{z}-z \\ &\Leftrightarrow z = \overline{z} \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Donc $\dfrac{1+z}{1-z}$ est un nombre réel si et seulement si z est un nombre réel.
5. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $1-\overline{a}z = 0$ si et seulement si $z = \dfrac{1}{\overline{a}}$. Supposons donc $z \neq \dfrac{1}{\overline{a}}$. Alors
$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |z-a|^2 \leq |1-\overline{a}z|^2.$$
Or $|x+y|^2 = |x|^2 + 2\mathrm{Re}(x\overline{y}) + |y|^2$. Donc
$$\begin{aligned} \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leq 1 &\Leftrightarrow |z|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{a}) + |a|^2 \leq 1 - 2\mathrm{Re}(\overline{a}z) + |a|^2|z|^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 1-|z|^2-|a|^2+|a|^2|z|^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (1-|a|^2)(1-|z|^2) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 1-|z|^2 \quad \text{car } |a| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow |z| \leq 1. \end{aligned}$$

Exercice 3. Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $3+4i$,
2. $7+24i$.

Après calculs, on trouve
1. $2+i$ et $-2-i$.
2. $4+3i$ et $-4-3i$.

Exercice 4. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| = 1$. Montrer que $|x-u| = |1-xu|$.

Comme $|u| = 1$, $u\overline{u} = 1$ et $\dfrac{1}{u} = \overline{u}$.

$$\begin{aligned}
|x-u| &= \left|u\left(\frac{1}{u}x-1\right)\right| \\
&= |u||\overline{u}x-1| \\
&= |\overline{u}x-1| \quad \text{car } |u|=1 \\
&= |\overline{\overline{u}x-1}| \quad \text{car } |z|=|\overline{z}| \\
&= |u\overline{x}-1| \\
&= |ux-1| \quad \text{car } x\in\mathbb{R} \\
&= |1-xu|
\end{aligned}$$

Exercice 5. Montrer que les solutions de l'équation

$$1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}-nz^n=0$$

sont de module inférieur ou égal à 1.

Soit $z\in\mathbb{C}$ une solution de l'équation. Supposons par l'absurde que $|z|>1$.

On a $1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}=nz^n$, donc $|1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}|=|nz^n|$.

Or, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
|1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}| &\le |1|+|z|+|z|^2+\ldots|z|^{n-1} \\
&< |z|^n+|z|^n+\ldots+|z|^n \quad \text{car } |z|>1 \\
&= n|z|^n \\
&= |nz^n|.
\end{aligned}$$

Donc $|nz^n|=|1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}|<|nz^n|$, ce qui est absurde.

Donc $|z|\le 1$.

Donc les solutions de l'équation sont de module inférieur ou égal à 1.

On peut aussi raisonner par contraposée : si $|z|>1$ alors z n'est pas solution de l'équation.

Exercice 6. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|\neq 1$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| \le \frac{1-|z|^n}{1-|z|}.$$

On exprime le terme de gauche comme la somme des termes d'une suite géométrique de raison z, puis on applique l'inégalité triangulaire généralisée, et on resimplifie grâce à la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $|z|$.

$$\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}|z|^k = \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$$

Exercice 7 (Inégalité de Ptolémée)**.**

1. Montrer que pour tout $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{C}^3$,

$$|x_0||y_0-z_0| \le |y_0||z_0-x_0|+|z_0||x_0-y_0|.$$

2. En déduire l'inégalité de Ptolémée : pour tout $(x,y,z,w)\in\mathbb{C}^4$,

$$|x-z||w-y| \le |x-y||z-w|+|x-w||y-z|.$$

3. En donner une interprétation géométrique.

---

1. Soient x_0, y_0 et $z_0 \in \mathbb{C}$.On a
$$x_0(y_0 - z_0) = x_0y_0 - y_0z_0 + y_0z_0 - x_0z_0 = y_0(x_0 - z_0) + z_0(y_0 - x_0).$$
Puis, en passant au module,
$$|x_0(y_0 - z_0)| = |y_0(x_0 - z_0) + z_0(y_0 - x_0)|$$
En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient alors
$$\begin{aligned} |x_0|\,|y_0 - z_0| &\le |y_0(x_0 - z_0)| + |z_0(y_0 - x_0)| \\ &= |y_0|\,|x_0 - z_0| + |z_0|\,|y_0 - x_0|. \end{aligned}$$
D'où le résultat.
2. On pose $x_0 = x - z$, $y_0 = x - y$ et $z_0 = x - w$, et alors l'inégalité précédente devient
$$|x - z|\,|(x - y) - (x - w)| \leqslant |x - y|\,|(x - z) - (x - w)| + |x - w|\,|(x - y) - (x - z)|,$$
soit
$$|x - z|\,|w - y| \leqslant |x - y|\,|w - z| + |x - w|\,|z - y|$$
3. Dans un quadrilatère, le produit des longueurs des diagonales est inférieur ou égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.

Exercice 8 (Bonus)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des éléments de D. Montrer que
$$\left|\prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|.$$

Raisonnons par récurrence sur n. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$ la proposition « Pour tous $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ éléments de D, $\left|\prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|$. »

• *Initialisation :* Pour $n = 1$, $P(1)$ est évidemment vraie.

• *Hérédité :* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$.

Soient $a_1, \ldots, a_{n+1}, b_1, \ldots, b_{n+1}$ des éléments de D. Posons $A_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ et $B_n = \prod_{k=1}^{n} b_k$.
$$\begin{aligned} \left|\prod_{k=1}^{n+1} a_k - \prod_{k=1}^{n+1} b_k\right| &= |A_n a_{n+1} - B_n b_{n+1}| \\ &= |A_n(a_{n+1} - b_{n+1}) + (A_n - B_n)b_{n+1}| \\ &\le |A_n||a_{n+1} - b_{n+1}| + |A_n - B_n||b_{n+1}|. \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $|a_k| \le 1$, donc $|A_n| \le \prod_{k=1}^{n} 1 = 1$ et on sait que $|b_{n+1}| \le 1$.

De plus, par hypothèse de récurrence, $|A_n - B_n| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|$.

Donc
$$\begin{aligned} \left|\prod_{k=1}^{n+1} a_k - \prod_{k=1}^{n+1} b_k\right| &\le |a_{n+1} - b_{n+1}| + \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} |a_k - b_k|. \end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$.

• *Conclusion :* Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

D'où le résultat.

Exercice 9 (Bonus)**.** Soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes tous non nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que
$$|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n|.$$

Démontrons par récurrence que $|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n|$ si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $z_i = \lambda_i z_1$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ la propriété « pour tous nombres complexes non nuls $z_1, \ldots, z_n$, $|z_1+\ldots+z_n| = |z_1|+\ldots+|z_n|$ si et seulement s'il existe des nombres réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $z_i = \lambda_i z_1$. »

• *Initialisation :* Pour $n = 1$, la propriété $P(1)$ est immédiate. Nous avons démontré dans le cours la propriété $P(2)$.

• *Hérédité :* Soit $n \geq 2$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$.

Soient $z_1, \ldots, z_{n+1}$ des nombres complexes non nuls. Posons $z = z_1 + \ldots + z_n$.

Par inégalité triangulaire, on a

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| = |z + z_{n+1}| \leq |z| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + \ldots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

Donc $|z_1 + \ldots + z_{n+1}| = |z_1| + \ldots + |z_{n+1}|$ si et seulement si les deux inégalités sont des égalités, soit si et seulement si

1. $z_{n+1} = \lambda z$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+$ d'après $P(2)$
2. $|z| = |z_1| + \ldots + |z_n|$, soit $|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n|$, soit d'après $P(n)$, si et seulement s'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $z_i = \lambda_i z_1$.

Donc finalement, $|z_1 + \ldots + z_{n+1}| = |z_1| + \ldots + |z_{n+1}|$ si et seulement s'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et λ éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $z_i = \lambda_i z_1$ et

$$z_{n+1} = \lambda z = \lambda(z_1 + \ldots + z_n) = \lambda(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) z_1.$$

En posant $\lambda_{n+1} = \lambda(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \in \mathbb{R}_+$, on en déduit $P(n+1)$.

• *Conclusion :* Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Donc $|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n|$ si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $z_i = \lambda_i z_1$.