Correction du TD n° 12

Nombres complexes : Équations du second degré et forme trigonométrique

28 mai 2021

Entraînement

Exercice 1.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   (a) $2z^2 + 2z + 1 = 0$,
   (b) $z^2 - (6+i)z + 11 + 13i = 0$,
2. Résoudre le système suivant d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7 + 3i \\ xy = 1 + 2i \end{cases}.$$

---

1. (a) Le discriminant vaut $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times 1 = -4 < 0$
   Les solutions complexes sont donc $z_1 = \dfrac{-2 - i\sqrt{4}}{4} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et $z_2 = -\dfrac{2 + i\sqrt{4}}{4} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$
   (b) Le discriminant vaut $\Delta = (6+i)^2 - 4(11 + 13i) = -9 - 40i$. Les racines carrées de Δ sont $4 - 5i$ et $-4 + 5i$.
   Les solutions complexes sont donc $z_1 = \dfrac{6 + i + 4 - 5i}{2} = 5 - 2i$ et $z_2 = \dfrac{6 + i - 4 + 5i}{2} = 1 + 3i$.
2. On a $\begin{cases} 2x + 2y = 7 + 3i \\ xy = 1 + 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{7 + 3i}{2} \\ xy = 1 + 2i \end{cases}$
   Donc x et y sont solutions du système si et seulement si x et y sont les solutions de l'équation $z^2 - \frac{7+3i}{2}z + 1 + 2i = 0$, soit encore $2z^2 - (7+3i)z + 2 + 4i = 0$.
   On a $\Delta = (7+3i)^2 - 4 \times 2 \times (1+2i) \times 2 = 24 + 10i$.
   Les racines carrées de Δ sont $5 + i$ et $-5 - i$.
   Donc les solutions sont $z_1 = \dfrac{7 + 3i - 5 - i}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ et $z_2 = \dfrac{7 + 3i + 5 + i}{4} = 3 + i$.
   Les solutions du système sont donc $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i \\ y = 3 + i \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 3 + i \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i \end{cases}$

Exercice 2.

1. Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :
   (a) $\dfrac{2 + 3i}{3 - 2i}$
   (b) $1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
2. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2 + 5i}{1 - i} + \dfrac{2 - 5i}{1 + i}$,
3. Déterminer les parties réelles et imaginaires de $(1 - i\sqrt{3})^{2021}$.
4. Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Posons $z = 1 + i\tan(\alpha)$. Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes z, $\dfrac{z}{\bar{z}}$ et $\dfrac{1}{z}$.

---

1. (a) $\dfrac{2 + 3i}{3 - 2i} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$,
   (b) $1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{8}}(e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}}) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) e^{i\frac{\pi}{8}}$, et on sait que $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > 0$. C'est donc sa forme trigonométrique.

2. On reconnait une expression en $z+\bar{z}$ avec $z=\dfrac{2+5i}{1-i}$, et
$$2\mathrm{Re}(z)=2\mathrm{Re}\left(\frac{(2+5i)(1+i)}{2}\right)=-3=3e^{i\pi}.$$
Donc le module vaut 3 et un argument est π.
3. $(1-i\sqrt{3})^{2021}=2^{2021}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}=2^{2021}(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2})=2^{2020}+i2^{2020}\sqrt{3}$.
Donc la partie réelle vaut 2^{2020} et la partie imaginaire $\sqrt{3}\,2^{2020}$.
4. On a
$$1+i\tan\alpha=1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}e^{i\alpha},$$
ce qui nous donne bien la forme trigonométrique puisque par hypothèse $\alpha\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et donc $\cos\alpha>0$.
On vérifie alors que
$$\frac{z_1}{\bar{z}_1}=\frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}}=e^{2i\alpha}\quad\text{et}\quad\frac{1}{z_1}=\cos\alpha\,e^{-i\alpha}.$$

Exercice 3.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $p\in\mathbb{Z}$ pour que le nombre $\mathrm{e}^{i\frac{p\pi}{n}}$ soit réel.
2. Trouver les entiers $n\in\mathbb{N}$ tels que $(1+i\sqrt{3})^n$ soit un nombre réel positif.

1.
$$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{n}}\in\mathbb{R}\iff\arg\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{\pi}}\right)\equiv 0[2\pi]\text{ ou }\arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p\pi}{\pi}}\right)\equiv\pi[2\pi]\iff\arg\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{\pi}}\right)\equiv 0[\pi]$$
$$\iff\frac{p\pi}{n}\equiv 0[\pi]\quad\iff\quad p\equiv 0[n]\quad\iff\quad p\text{ est un multiple de }n$$
2. En prenant la puissance n-ième, on trouve
$$(1+i\sqrt{3})^n=2^ne^{in\pi/3}.$$
Ceci est un réel positif si et seulement si $\sin(n\pi/3)=0$ et $\cos(n\pi/3)\geq 0$. Or, $\sin(n\pi/3)=0$ si et seulement si $n=3k$, $k\in\mathbb{Z}$. Mais, pour ces valeurs de n, on a $\cos(n\pi/3)=\cos(k\pi)$, et ceci est positif si et seulement si k est pair. Ainsi, les entiers qui conviennent sont les multiples de 6.
Autre méthode : $(1+i\sqrt{3})^n\in\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\arg(1+i\sqrt{3})^n\equiv 0\,[2\pi]$, soit si et seulement si, d'après le calcul précédent, $\dfrac{n\pi}{3}\equiv 0\,[2\pi]$, soit finalement si et seulement si $n\equiv 0\,[6]$, c'est-à-dire n est un multiple de 6.

Application des techniques

Exercice 4. Soit $x\in\mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. Linéariser $\cos(x)\sin(3x)^3$.

1.
$$\begin{aligned}\cos(5x)&=\mathrm{Re}((\cos(x)+i\sin(x))^5)\\&=\cos(x)^5-10\sin(x)^2\cos(x)^3+5\sin(x)^4\cos(x)\quad\text{par la formule du binôme de Newton}\\&=\cos(x)^5-10(1-\cos(x)^2)\cos(x)^3+5(1-\cos(x))^2\cos(x)\\&=16\cos(x)^5-20\cos(x)^3+5\cos(x).\end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned}\cos x\sin(3x)^3&=\left(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^3\\&=-\frac{1}{16i}\left(\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}\right)\left(\mathrm{e}^{9ix}-3\mathrm{e}^{3ix}+3\mathrm{e}^{-3ix}-\mathrm{e}^{-9ix}\right)\\&=-\frac{1}{16i}\left(\mathrm{e}^{10ix}-3\mathrm{e}^{4ix}+3\mathrm{e}^{-2ix}-\mathrm{e}^{-8ix}+\mathrm{e}^{8ix}-3\mathrm{e}^{2ix}+3\mathrm{e}^{-4ix}-\mathrm{e}^{-10ix}\right)\\&=\frac{3}{8}\sin 2x+\frac{3}{8}\sin 4x-\frac{1}{8}\sin 8x-\frac{1}{8}\sin 10x.\end{aligned}$$

Exercice 5. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(a+bk)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(a+bk)$.
2. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. Posons $z=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$.
   (a) Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z^k-1.
   (b) On pose $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|z^k-1\right|$. Montrer que $S=\dfrac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

---

1. On calcule $\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{i(a+bk)}$ puis on prendra les parties réelles et imaginaires.
   Supposons que $b\notin 2\pi\mathbb{Z}$. Alors $\mathrm{e}^{ib}\neq 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{i(a+bk)}&=\mathrm{e}^{ia}\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{e}^{ib}\right)^k\\&=\mathrm{e}^{ia}\frac{1-\mathrm{e}^{ib(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{ib}}\\&=\mathrm{e}^{ia}\frac{\mathrm{e}^{i\frac{b(n+1)}{2}}\sin(b\frac{n+1}{2})}{\mathrm{e}^{ib/2}\sin(b/2)}\\&=\mathrm{e}^{i(a+\frac{bn}{2})}\frac{\sin(b\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{b}{2})}.\end{aligned}$$

   Donc
$$\sum_{k=0}^{n}\cos(a+bk)=\cos(a+\frac{bn}{2})\frac{\sin(b\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{b}{2})}$$
   et
$$\sum_{k=0}^{n}\sin(a+bk)=\sin(a+\frac{bn}{2})\frac{\sin(b\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{b}{2})}.$$
   Si $b\in 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum_{k=0}^{n}\cos(a+bk)=(n+1)\cos(a)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(a+bk)=(n+1)\sin(a)$.
2. En prenant $a=0$ et $b=\dfrac{\pi}{n}+\pi$, obtient $\cos(a+bk)=\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)=(-1)^k\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ et on trouve la valeur à l'aide de la question précédente.
3. (a) On a
$$z^k-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k2\pi}{n}}-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$
   donc $z^k-1=2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}$.
   Pour $k\in[\![1,n-1]\!]$, on a $0<\frac{k\pi}{n}<\pi$, donc $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)>0$.
   Donc le module de z^k-1 est $2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et un argument de z^k-1 est $\dfrac{k\pi}{n}+\dfrac{\pi}{2}$.
   (b) Remarquons que si $k=0$, $z^k=1$ donc $|z^k-1|=0=2\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.
   D'après la question 1,
$$\begin{aligned}S=\sum_{k=0}^{n-1}|z^k-1|&=\sum_{k=0}^{n-1}2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\\&=\frac{2\sin\left(\frac{\pi(n-1)}{2n}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)\times 1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\\&=\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\\&=\frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.\end{aligned}$$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, exprimer sous forme d'une somme la quantité $(1+x)^n$.
2. En exprimant cette relation pour $x = 1$ et $x = -1$, déterminer $\displaystyle\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$.
3. On pose $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   (a) Vérifier que $1 - j^3 = 0$.
   (b) En déduire que $1 + j + j^2 = 0$.
   (c) *(Bonus)* En exprimant la relation de la question 1 à $x = 1$, $x = j$ et $x = j^2$, déterminer $\displaystyle\sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k}$.

---

1. D'après la formule du binôme de Newton,
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$
2. Pour $x = 1$ et $x = -1$ on a :
$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$
$$0^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k.$$
En sommant ces deux égalités on a : $2^n = \sum_{0 \leq 2i \leq n} \binom{n}{2i} 2$, et donc
$$\sum_{0 \leq 2i \leq n} \binom{n}{2i} = 2^{n-1}$$
3. (a) On a $j^3 = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1$ donc $1 - j^3 = 0$.
   (b) Or $1 + j + j^2 = \dfrac{1 - j^3}{1 - j}$, donc $1 + j + j^2 = 0$.
   (c) En prenant $x = 1$, $x = j$ et $x = j^2$, on obtient
$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$
$$(1+j)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k$$
$$(1+\bar{j})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \bar{j}^k$$
En sommant ces trois égalités on a :
$$2^n + (1+j)^n + (1+\bar{j})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1 + j^k + \bar{j}^k\right)$$
Or pour tout entier k :
– Si k est divisible par 3 , alors $1 + j^k + \bar{j}^k = 1 + 1 + 1 = 3$;
– Si le reste dans la division de k par 3 est 1, alors $1 + j^k + \bar{j}^k = 1 + j + \bar{j} = 0$;
– Si le reste dans la division de k par 3 est 2 , alors $1 + j^k + \bar{j}^k = 1 + j^2 + \bar{j}^2 = 1 + j^2 + j = 0$; donc
Donc
$$\sum_{0 \leq 3i \leq n} \binom{n}{3i} = \frac{2^n + 2\mathrm{Re}\left((1+j)^n\right)}{3} = \frac{2^n + 2\mathrm{Re}\left((-\bar{j})^n\right)}{3}.$$
Discutons suivant le reste dans la division de n par 3 :
– Si n s'écrit $n = 3m$, avec $m \in \mathbf{N}^*$, alors
$$\sum_{0 \leq 3i \leq n} \binom{n}{3i} = \frac{2^{3m} + 2(-1)^{3m}}{3} = \frac{2^{3m} + 2(-1)^m}{3}$$
- Si n s'écrit $n = 3m + 1$, avec $m \in \mathbf{N}$, alors
$$\sum_{0 \leq 3i \leq n} \binom{n}{3i} = \frac{2^{3m+1} + 2(-1)^{3m+1}\mathrm{Re}(j)}{3} = \frac{2^{3m+1} + (-1)^m}{3}$$
- Si n s'écrit $n = 3m + 2$, avec $m \in \mathbf{N}$, alors
$$\sum_{0 \leq 3i \leq n} \binom{n}{3i} = \frac{2^{3m+2} + 2(-1)^{3m+2}\mathrm{Re}\left(j^2\right)}{3} = \frac{2^{3m+2} + (-1)^{m+1}}{3}.$$

Exercice 7 (Bonus)**.** Soient α, β, γ trois nombres réels tels que

$$\begin{cases}\cos(\alpha)+\cos(\beta)+\cos(\gamma)=0\\ \sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma)=0\end{cases}.$$

Montrer que

$$\begin{cases}\cos(2\alpha)+\cos(2\beta)+\cos(2\gamma)=0\\ \sin(2\alpha)+\sin(2\beta)+\sin(2\gamma)=0\end{cases}.$$

• *Méthode 1 :* Posons $a=e^{i\alpha}, b=e^{i\beta}$ et $c=e^{i\gamma}$. Par hypothèse on a $a+b+c=0$ mais aussi $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$. Puisque a,b et c sont de module 1, on a $\bar{a}=\frac{1}{a}, \bar{b}=\frac{1}{b}$ et $\bar{c}=\frac{1}{c}$. Ainsi $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=0$ donc $bc+ac+ab=0$ Mais alors $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(bc+ac+ab)=0$. En considèrant les parties réelles et imaginaires, on obtient le résultat demandé.

• *Méthode 2 :* Puisque $\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{iy}+\mathrm{e}^{iz}=0$, en multipliant par e^{-ix}, on obtient

$$1+\mathrm{e}^{i\alpha}+\mathrm{e}^{i\beta}=0$$

avec $\alpha=y-x$ et $\beta=z-x$. En passant aux parties réelle et imaginaire

$$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=-1\\ \sin\alpha+\sin\beta=0\end{cases}$$

L'équation $\sin\alpha+\sin\beta=0$ donne

$$\alpha=-\beta\quad[2\pi]\text{ ou }\alpha=\pi+\beta\quad[2\pi]$$

Si $\alpha=\pi+\beta\quad[2\pi]$ alors la relation $\cos\alpha+\cos\beta=-1$ donne $0=-1$. Il reste $\alpha=-\beta\quad[2\pi]$ et alors $2\cos\alpha=-1$ donne $\alpha=\pm2\pi/3\quad[2\pi]$. Par suite $\mathrm{e}^{i\alpha}=j$ ou j^2. On obtient alors aisément $1+\mathrm{e}^{2i\alpha}+\mathrm{e}^{2i\beta}=0$ puis $\mathrm{e}^{2ix}+\mathrm{e}^{2iy}+\mathrm{e}^{2iz}=0$.

Exercice 8 (Bonus)**.** Résoudre le système suivant d'inconnues $(x,y)\in\mathbb{R}^{*2}$:

$$\begin{cases}x\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=2\\ y\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=3.\end{cases}.$$

Posons $z=x+iy$.

Alors le système s'écrit aussi $\begin{cases}x\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=2\\ x+iy+\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}=2+3i\end{cases}$, soit $\begin{cases}x\left(1+\dfrac{1}{a^2+b^2}\right)=2\\ z+\dfrac{1}{z}=2+3i\end{cases}$.

En effet, on a $\bar{z}=x-iy$ et $|z|^2=z\bar{z}=x^2+y^2$ ainsi

$$\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{1}{z}$$

On résout donc l'équation $z^2-(2+3i)z+1=0$. On a $\Delta=(2+3i)^2-4=-9+12i$, on cherche alors δ tel que $\delta^2=\Delta$. On pose $\delta=u+iv$, où $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ alors

$$\begin{cases}u^2-v^2=-9\\ 2uv=12>0\\ u^2+v^2=\sqrt{81+144}=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2u^2=6\\ 2v^2=24\\ uv>0\end{cases}$$

On choisit donc $\delta=\sqrt{3}(1+2i)$. Les solutions de l'équation sont alors

$$z_1=\frac{2+3i+\sqrt{3}+2\sqrt{3}i}{2}=\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)$$
$$z_2=\frac{2+3i-\sqrt{3}-2\sqrt{3}i}{2}=\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+1\right)+i\left(-\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)$$

Ainsi puisque $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$, on obtient deux couples de solutions pour x et y :

$$(x,y)=\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+1,\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)$$

et

$$(x,y)=\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+1,-\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right).$$

Résolvons ce système sur $\mathbb{C}$. Soient $(x,y)\in\mathbb{C}^{*2}$ vérifiant le système.

On a alors $\begin{cases} yx\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=2y \\ xy\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=3x. \end{cases}$.

Par somme, on a alors $\begin{cases} yx\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=2y \\ 2xy=2y+3x \end{cases}$, soit $\begin{cases} yx\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=2y \\ y=\dfrac{3x}{2x-2} \end{cases}$.

Comme $x^2+y^2=\dfrac{x}{2-x}$, on obtient $y^2=\dfrac{x}{2-x}-x^2=\dfrac{x(1-x)^2}{2-x}$.

On en déduit alors $\left(\dfrac{3x}{2x-2}\right)^2=\dfrac{x(1-x)^2}{2-x}$, soit $9x(2-x)=4(x-1)^4$.

Cette équation se réécrit $4x^4-16x^3+33x^2-34x+4=0$.

On a trouvé d'après la première partie de l'exercice deux solutions réelles $\dfrac{1}{2}\sqrt{3}+1$ et $-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}+1$.

On peut alors trouver les deux autres solutions complexes qui sont $1+i\sqrt{3}$ et $1-i\sqrt{3}$.

Nous obtenons ainsi quatre solutions possibles pour x. De l'expression $y=\dfrac{3x}{2x-2}$, on obtient $y=\dfrac{3+3i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}}$ et $y=\dfrac{3-3i\sqrt{3}}{-2i\sqrt{3}}$.

On vérifie que les quatre couples de solutions complexes obtenus sont solutions.