Feuille de TD n° 9

Continuité et dérivabilité

3 mai 2021

Exercice 1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Déterminer les limites de f à droite et à gauche de 1.
4. Déterminer les variations de f sur son ensemble de définition.
5. Préciser l'équation de la tangente de f en 0.

Exercice 2. Étudier les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivée :

1. $f_1 : x \longmapsto (\cos(x))^3$,
2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{\arctan(x)}{1+x^2}$,
3. $f_3 : x \longmapsto \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$,
4. $f_4 : x \longmapsto \ln(\ln(\ln(x)))$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée n-ième de la fonction

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, x \longmapsto \frac{1}{1-x}.$$

Exercice 4. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

Exercice 5. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose f'' positive sur I.

1. (a) Décrire l'allure du graphe de f.
   (b) Montrer que le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes.
   (c) Que dire si f'' est négative sur I ?
2. En déduire les inégalités suivantes :
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.
   (b) Pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.
   (c) Pour tout $x \geq 0$, $\text{sh}(x) \geq x$.

Exercice 6. Montrer que l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, x \longmapsto (x - E(x))^2 + (E(x) + 1 - x)^2$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Démontrer que, pour tout $(x,y) \in]-1,1[^2$,

$$\frac{x+y}{1+xy} \in]-1,1[.$$

Exercice 8 (Bonus)**.**

1. Étudier la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par
$$f(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x).$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1$.