Corrigé du TD n° 9

Continuité et dérivabilité

6 mai 2021

Exercice 1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Déterminer les limites de f à droite et à gauche de 1.
4. Déterminer les variations de f sur son ensemble de définition.
5. Préciser l'équation de la tangente de f en 0.

---

1. L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
3. On a $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.
4. La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ car $x \longmapsto 1-x$ l'est et ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est aussi dérivable sur $\mathcal{D}_f$.
   De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}(-(1-x)+1)}{(1-x)^2} = \dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1-x)^2}$.
   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0

5. L'équation de la tangente est $y = f(0) + (x-0)f'(0) = 1 + x \times 0 = 1$.

Exercice 2. Étudier les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivée :

1. $f_1 : x \longmapsto (\cos(x))^3$,
2. $f_2 : x \longmapsto \dfrac{\arctan(x)}{1+x^2}$,
3. $f_3 : x \longmapsto \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$,
4. $f_4 : x \longmapsto \ln(\ln(\ln(x)))$.

---

1. Les fonction cos et $x \longmapsto x^3$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc par composée, f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = -3\sin(x)\cos(x)^2$.
2. La fonction $x \longmapsto 1 + x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$ et arctan est également définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc par quotient, f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f_2'(x) = \frac{1 - 2x\arctan(x)}{(1+x^2)^2}.$$

3. La fonction $x \longmapsto 1+x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1,+\infty[$. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, donc par composée, $x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1,+\infty[$. La fonction $x \longmapsto x+\sqrt{1+x^2}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1,+\infty[$. Finalement, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
   La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'après ce qui précède, par composée, $x \longmapsto x+\sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1,+\infty[$, donc f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_3'(x) = \left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{1+x^2}}.$$
4. La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour que $x \longmapsto \ln(\ln(\ln(x)))$ soit bien définie, il faut donc que $\ln(\ln(x))$ soit bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On doit donc avoir $x>0$ et $\ln(\ln(x))>0$. On a
$$\begin{aligned}\ln(\ln(x))>0 &\Leftrightarrow \ln(x)>1\\ &\Leftrightarrow x>\mathrm{e}^1.\end{aligned}$$
   Donc la fonction f_4 est définie sur $]\mathrm{e}^1,+\infty[$.
   La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc d'après ce qui précède, par composée, $x \longmapsto \ln(\ln(x))$ est dérivable sur $]\mathrm{e}^1,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc f_4 est dérivable sur $]\mathrm{e}^1,+\infty[$.
   Pour tout $x \in]\mathrm{e}^1,+\infty[$,
$$f_4'(x) = \frac{1}{x}\times\frac{1}{\ln(x)}\times\frac{1}{\ln(\ln(x))}.$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée n-ième de la fonction
$$f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \frac{1}{1-x}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

On a $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$,

puis $f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$,

puis $f'''(x) = \dfrac{2\times 3}{(1-x)^4}$.

On peut alors montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Exercice 4. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases}\frac{\pi}{2} \text{ si } x>0\\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x<0\end{cases}.$$

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \arctan(x)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et arctan étant dérivable sur $\mathbb{R}$, par composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

La fonction f est donc de dérivée nulle sur l'**intervalle** $]-\infty,0[$, f est donc constante sur cet intervalle.

Or $f(-1) = 2\arctan(-1) = -2\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2}$. Donc, pour tout $x \in]-\infty,0[$, $f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.

De même, f est de dérivée nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$, donc f est constante sur cet intervalle.

Or $f(1) = 2\arctan(1) = 2\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$. Donc, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Remarque : on pouvait aussi conclure directement par imparité de la fonction f.

D'où le résultat.

Exercice 5. Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose f'' positive sur I.

1. (a) Décrire l'allure du graphe de f.
   (b) Montrer que le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes.
   (c) Que dire si f'' est négative sur I ?
2. En déduire les inégalités suivantes :
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geq x+1$.
   (b) Pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x-1$.
   (c) Pour tout $x \geq 0$, $\mathrm{sh}(x) \geq x$.

---

1. (a) Schéma
   (b) Soit $a \in I$. Posons, pour tout $x \in I$, $g(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$.
   Pour tout $x \in I$, on a $(f-g)'(x) = f'(x) - f'(a)$ et $(f-g)''(x) = f''(x) \geq 0$.
   On obtient donc le tableau de variations suivant :

x		a	
$(f-g)''(x)$	$+$		$+$
$(f-g)'(x)$	$-$	0	$+$
$(f-g)(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

   Donc, pour tout $x \in I$, $(f-g)(x) \geq 0$, soit $f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a)$.
   On en déduit que le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes.
   (c) Si f'' est négative sur I alors le graphe de f est situé au-dessous ses tangente.
2. (a) On a $\exp'' = \exp$, donc $\exp''$ est positive. D'après ce qui précède, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\exp(x) \geq \exp(0) + (x-0)\exp'(0) = 1 + x.$$
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$. D'après ce qui précède, on a donc, pour tout $x > 0$,
$$\ln(x) \leq \ln(1) + (x-1)\ln'(1) = x - 1.$$
   (c) On a $\mathrm{sh}'' = \mathrm{sh}$, donc sh'' est positive sur $\mathbb{R}_+$. D'après ce qui précède, on a donc, pour tout $x \geq 0$,
$$\mathrm{sh}(x) \geq \mathrm{sh}(0) + (x-0)\mathrm{sh}'(x) = x.$$

Exercice 6. Montrer que l'application
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; x \longmapsto (x - E(x))^2 + (E(x) + 1 - x)^2$$
est continue sur $\mathbb{R}$.

La partie entière E étant continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la fonction f l'est aussi.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Étudions la continuité de f en n.

À gauche en n : pour tout $x \in]n-1, n[$, $f(x) = (x-(n-1))^2 + (n-1+1-x)^2 = (x-n+1)^2 + (n-x)^2$. Donc $\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = 1 = f(n)$. Donc f est continue à gauche en n.

À droite en a : pour tout $x \in]n, n+1[$, $f(x) = (x-n)^2 + (n+1-x)^2$. Donc $\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = 1 = f(n)$. Donc f est continue à droite en n.

Donc f est continue en n, donc en tout point de $\mathbb{Z}$.

Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in]-1, 1[^2$,
$$\frac{x+y}{1+xy} \in]-1, 1[.$$

Soit $y_0 \in]-1,1[$. Posons, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{x+y_0}{1+xy_0}$.

On a $1 + xy_0 = 0$ si et seulement si $x = -\dfrac{1}{y_0}$. Comme $y_0 \in]-1,1[$, pour tout $x \in]-1,1[$, $1 + xy_0 \neq 0$. Donc la fonction f est définie et dérivable sur $]-1,1[$.

Pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \dfrac{1+xy-y(x+y)}{(1+xy)^2} = \dfrac{1-y^2}{(1+xy)^2}$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	-1		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

Donc pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{x+y_0}{1+xy_0} \in]-1,1[$.

y_0 étant un élément quelconque de $]-1,1[$, on en déduit que pour tout $(x,y) \in]-1,1[^2$, $\dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1,1[$.

Exercice 8 (Bonus)**.**

1. Étudier la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par
$$f(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x).$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1$.

---

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Étudions la fonction f sur $I = [-\pi, \pi]$.
f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = 3\cos(x)\sin(x)(\sin(x) - \cos(x))$.
Résolvons l'inéquation $\sin(x) - \cos(x) \geq 0$ sur I.
$$\begin{aligned}\sin(x) - \cos(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) \leq 0\\ &\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0\\ &\Leftrightarrow x \in \left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right].\end{aligned}$$
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$	
$\cos(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$		$-$	
$\sin(x) - \cos(x)$		$+$		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

2. Du tableau de variations, on déduit que sur $[-\pi, \pi]$ les solutions de l'équation $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1$ sont 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.
Par 2π-périodicité, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est donc
$$\mathcal{S} = 2\pi\mathbb{Z} \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right).$$