TD 9. Sciences Maths

Exercice 1.

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{1-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$e^{-1} > 0$

3. $\dfrac{e^{-x}}{1-x} \xrightarrow[x<1]{x\to1} +\infty$

$\dfrac{e^{-x}}{1-x} \xrightarrow[x>1]{x\to1} -\infty$

4. f est dérivable sur D_f et pour tout $x \in D_f$,

$f'(x) = \dfrac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$

$$\frac{-e^{-x}\times(1-x) - e^{-x}\times(-1)}{(1-x)^2} = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}.$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	0

"double barre"

5. $y = f(0) + (x-0)f'(0)$

$= 1 + x \times 0$

Donc l'équation est $y = 1$. "tangente horizontale".

$$(g\circ f)' = f' \times g'\circ f$$
$$g(x) = x^3 \quad , \quad f(x) = \cos(x)$$

Exercice 2

1. $D_{f_1} = \mathbb{R}$ et l'ensemble de dérivabilité est $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_1'(x) = 3\cos^2(x) \times (-\sin(x))$$
$$= -3\cos^2(x)\sin(x).$$

2. $D_{f_2} = \mathbb{R}$ et l'ensemble de dérivabilité est $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' f}{g^2}$$

$$f_2'(x) = \frac{\frac{1}{x^2+1} \times (1+x^2) - 2x\arctan(x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1 - 2x\arctan(x)}{(1+x^2)^2}.$$

3. $D_{f_3} = \mathbb{R}$, et l'ensemble de dérivabilité est $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(g\circ f)' = f' \times g'\circ f.$$
$$g(x) = \sqrt{x}$$
$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}.$$

$$f_3'(x) = \left(1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}\right)^2}{\sqrt{1+x^2} \times 2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}$$

$$= \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}.$$

4. $x \in D_{f_4}$ ssi $\ln(\ln(x)) > 0$

ssi $\ln(x) > 1$

ssi $x > e^1 = e > 0$

$$(g\circ f)' = f' \times g'\circ f$$
$$g(x) = \ln(x)$$
$$f(x) = \ln(\ln(x))$$

Donc $D_{f_4} =]e, +\infty[$.

f_4 est dérivable sur $]e, +\infty[$.

Pour tout $x \in]e, +\infty[$,

$$f_4'(x) = \frac{1}{x \times \ln(x)} \times \frac{1}{\ln(\ln(x))} = \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln x)}.$$

Exercice 3

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (1-x)^{-2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad 2 \times (1-x)^{-3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2 \times 3}{(1-x)^4} \qquad 2 \times 3 \times (1-x)^{-4}.$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \qquad 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$$

On peut le démontrer par récurrence.

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$$

Comme $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{\overbrace{n! \times (n+1)}^{(n+1)!}}{(1-x)^{n+2}}$

Exercice 4

$(g \circ f)'$ $\quad g = \arctan$, $f(x) = \frac{1}{x}$

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Par composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

n'est pas un intervalle.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

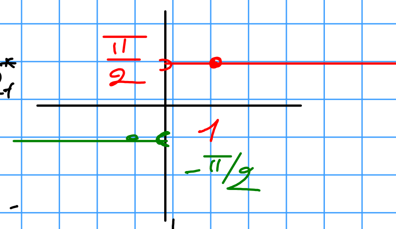
$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Donc f' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$,

donc f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De même, f' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[$,

donc f est constante sur $\mathbb{R}_-^*$.

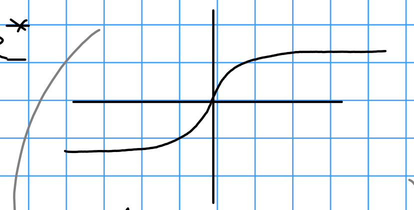


On a $f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et $1 \in \mathbb{R}_+^*$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

On a $f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$ et $-1 \in \mathbb{R}_-^*$

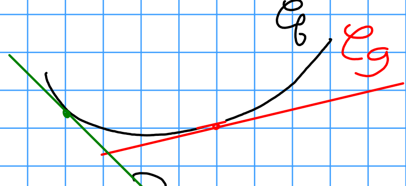
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(x) = -\frac{\pi}{2}$.



arctan est impaire.
f est donc impaire.

Exercice 5

1. a)



b) Soit $a \in I$. Posons, pour tout $x \in I$, $g(x) = f(a) + (x-a) f'(a)$

Montrons que $f(x) \geq g(x)$.

Posons $h = f - g$. On a $h(a) = f(a) - g(a) = 0$

h est dérivable et $h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - f'(a)$

et $h''(x) = f''(x) \geq 0$ (par hypothèse).

$I = [\alpha, \beta]$

x	α		a		β
$h''(x)$		+		+	
$h'(x)$	$-$	↗	0	↗ $+$	
$h(x)$		↘	0	↗	

Donc pour tout $x \in I$,

$h(x) \geq 0$.

Donc $f(x) \geq g(x)$

c) Si $f'' \leq 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de ses tangentes.

2. a) $\left(h(x) = e^x - x - 1\right.$ puis étudier les variations$\left.\right)$

$\exp'' = \exp \geq 0$

Donc d'après 1.b), pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) \geq \underbrace{e^0 + (x-0)\exp'(0)}_{\text{tangente en } 0} = 1 + x.$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \leq 0$

Donc d'après 1c), pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(x) \leq \underbrace{\ln(1) + (x-1)\ln'(1)}_{\text{tangente en } 1} = x - 1.$$

c) $\operatorname{sh}'' = \operatorname{sh}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{sh}''(x) \geq 0$

Donc $$\operatorname{sh}(x) \geq \underbrace{\operatorname{sh}(0) + (x-0)\operatorname{sh}'(0)}_{\text{tangente en } 0} = 0 + x \times 1 = x.$$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Ex 6. regarder la continuité en $n \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{\substack{x \to n \\ x > n}} f(x) = ? \qquad \lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} f(x) = ?$$

Sont-elles égales à $f(n)$?

Ex 7. Soit $y_0 \in \,]-1, 1[$. Posons $f(x) = \dfrac{x + y_0}{1 + x y_0}$.

Faire un tableau de variations.