Feuille de TD n° 14

Fractions rationnelles

16 juin 2021

Exercice 1. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{1}{X^3 - X}$,
2. $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$,
3. $\dfrac{1}{X(X-1)^2}$,
4. $\dfrac{X^3+1}{(X-1)^3}$,
5. $\dfrac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)}$,
6. $\dfrac{1}{X^3+1}$.

---

1. La partie entière est nulle, et le dénominateur se factorise en $X(X-1)(X+1)$.
   La décomposition est donc de la forme
   $$\frac{1}{X(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}.$$
   En multipliant par X et en faisant $X=0$, $a=-1$.
   En multipliant par $X-1$ et en faisant $X=1$, $b=\frac{1}{2}$.
   En multipliant par $X+1$ et en faisant $X=-1$, $c=\frac{1}{2}$.
   On trouve finalement
   $$\frac{1}{X^3-X} = \frac{-1}{X} + \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/2}{X+1}.$$
2. Il y a cette fois une partie entière, car le numérateur et le dénominateur ont même degré. Cette partie entière obtenue en faisant la division euclidienne vaut 1, et on a
   $$\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = 1 + \frac{5X+3}{X^2-3X+2}.$$
   Le dénominateur se factorise en $(X-1)(X-2)$ et on trouve finalement, utilisant les techniques décrites dans la question précédente
   $$\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}.$$
3. Soit $F = \dfrac{1}{X(\mathrm{X}-1)^2}$. La décomposition en éléments simples de F s'écrit sous la forme :
   $$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{\mathrm{X}-1} + \frac{c}{(X-1)^2}$$
   Par les mêmes techniques, on obtient $a=1$ et $c=1$. Enfin, $a+b=\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0$ et donc $b=-1$ (ou bien $x=-1$ fournit $-1-\frac{b}{2}+\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ et donc $b=-1$). Donc,
   $$\frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$$
4. La partie entière de cette fraction rationnelle est égale à 1, et on a
   $$\frac{X^3+1}{(X-1)^3} = 1 + \frac{3X^2-3X+2}{(X-1)^3} = 1 + \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1}.$$
   Pour trouver a, on multiplie par $(X-1)^3$ et on fait $X=1$. On trouve
   $$a = 2.$$

Pour trouver b, on soustrait $\frac{2}{(X-1)^3}$, et on trouve

$$\begin{aligned}\frac{3X^2-3X+2}{(X-1)^3}-\frac{2}{(X-1)^3} &= \frac{3X}{(X-1)^2}\\ &= \frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X-1}.\end{aligned}$$

Multipliant par $(X-1)^2$ et faisant $X=1$, on trouve

$$b=3.$$

Finalement, on retranche encore $\frac{3}{(X-1)^2}$ de sorte que

$$\begin{aligned}\frac{3X}{(X-1)^2}-\frac{3}{(X-1)^2} &= \frac{3}{X-1}\\ &= \frac{c}{X-1}.\end{aligned}$$

On a donc $c=3$. Finalement, la décomposition en éléments simples recherchée est

$$1+\frac{2}{(X-1)^3}+\frac{3}{(X-1)^2}+\frac{3}{X-1}.$$

(Une autre méthode est proposée dans la correction manuscrite).

5. Les pôles sont -1 (double), i et $-i$. La fraction rationnelle étant à coefficients réels, les parties polaires sont conjuguées. On a donc

$$\frac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)}=1+\frac{a}{(X+1)^2}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X-i}+\frac{\bar{c}}{X+i}.$$

Multipliant par $X-i$ et faisant $X=i$, on trouve

$$c=\frac{i^4+1}{(i+i)(i+1)^2}=-\frac{1}{2}.$$

De même, on a

$$a=\frac{1+1}{1+1}=1.$$

En retranchant $\frac{1}{(X+1)^2}$, on trouve

$$\frac{X^4-X^2}{(X+1)^2(X^2+1)}=\frac{X^2(X-1)}{(X+1)(X^2+1)}=1+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X-i}+\frac{\bar{c}}{X+i}.$$

Multipliant par $X+1$ et faisant $X=-1$, on trouve

$$b=-1.$$

Donc

$$\frac{-2X^3-2X^2-2X}{(X+1)^2(X^2+1)}=-\frac{1}{X+1}+\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X-i}+\frac{1}{X+i}\right)=-\frac{1}{X+1}+\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{X}{X^2+1}.$$

Finalement,

$$\frac{X^4+1}{(X+1)^2(X+1)^2}=1-\frac{1}{X+1}+\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X-i}+\frac{1}{X+i}\right)=-\frac{1}{X+1}+\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{X}{X^2+1}.$$

6. On a $1+X^3=(X+1)(X^2-X+1)=(X+1)(X-\mathrm{e}^{-i\pi/3})(X-\mathrm{e}^{-i\pi/3})$, en étudiant les racines complexes de X^2-X+1. La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ est donc de la forme

$$\frac{1}{1+X^3}=\frac{a}{X+1}+\frac{b}{X-\mathrm{e}^{i\pi/3}}+\frac{c}{X-\mathrm{e}^{-i\pi/3}}.$$

En utilisant la technique de la dérivée, on trouve $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2i\pi/3}$ et $c=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2i\pi/3}$.
En regroupant les facteurs conjugués, on a donc

$$\frac{1}{1+X^3}=\frac{1/3}{1+X}+\frac{1}{3}\frac{-X+2}{X^2-X+1}.$$

On pouvait aussi décomposer sous la forme $\frac{a}{1+X}+\frac{b+cX}{X^2-X+1}$, obtenir facilement $a=\frac{1}{3}$. En évaluant en 0, $1=a+b$ et en multipliant par X et en passant à la limite, $0=a+c$. On retrouve le résultat.

Exercice 2.

1. Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de $\frac{1}{X^n-1}$.

2. Déterminer la décomposition en éléments simples de
$$\frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)}.$$
3. Soient a_1, a_2, …, a_n des nombres réels distincts. On pose $A = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$. Calculer $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)}$.

   Indication : On pourra étudier la fraction rationnelle $\frac{1}{A}$.

- La fraction $\frac{1}{X^n-1}$ est sans partie entière, et admet n pôles distincts, $1, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ où $\omega_k = \exp(2ik\pi/n)$. Elle admet donc une décomposition en éléments simples de la forme :
$$\frac{1}{X^n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{X-\omega_j}$$
D'après le cours, en utilisant la dérivation,
$$a_j = \frac{1}{n\left(\omega_j\right)^{n-1}} = \frac{\omega_j}{n} = \frac{\exp\left(i\frac{2j\pi}{n}\right)}{n}$$
Donc
$$\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\omega_j}{X-\omega_j}.$$
- La partie entière est nulle et $0, 1, \dots, n$ sont pôles simples. On peut donc écrire
$$\frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(X-k)}$$
avec
$$a_k = \frac{n!}{k(k-1)\dots 1.(-1)\dots(k-n)} = (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!(n-k)!} = (-1)^{n-k}\binom{n}{k}$$
- Supposons $n > 1$ La fraction rationnelle $\frac{1}{A(X)}$ sans partie entière et de pôles $a_1, a_2 \dots, a_n$ se décompose en éléments simples ainsi :
$$\frac{1}{A(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'\left(a_i\right)}\frac{1}{X-a_i}$$
Donc
$$\frac{x}{A(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'\left(a_i\right)}\frac{x}{x-a_i} \underset{x\to+\infty}{\to} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'\left(a_i\right)}.$$
Or $n > 1$ donc $\frac{x}{A(x)} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. Conclusion :
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'\left(a_i\right)} = 0$$
Si $n = 1$, $A = X - a_1$ et $A' = 1$, donc $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)} = \frac{1}{A'(a_1)} = 1$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré non nul n. On note z_1, …, z_n les n racines de P distinctes ou non. Montrer que
$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X-z_i}.$$
2. On note r_1, …, r_p les racines de P deux à deux distinctes de multiplicités respectives m_1, …, m_r. Déduire de la question précédente la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.
3. Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que Q' divise Q.

---

1. On a $P = (X - z_1) \dots (X - z_n)$ et donc
$$P' = \sum_{i=1}^{n} (X - z_1) \dots (X - z_{i-1})(X - z_{i+1}) \dots (X - z_n).$$
Donc
$$\begin{aligned} \frac{P'}{P} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (X - z_1) \dots (X - z_{i-1})(X - z_{i+1}) \dots (X - z_n)}{(X - z_1) \dots (X - z_i) \dots (X - z_n)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(X - z_1) \dots (X - z_{i-1})(X - z_{i+1}) \dots (X - z_n)}{(X - z_1) \dots (X - z_i) \dots (X - z_n)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - z_i}. \end{aligned}$$
2. En regroupant pour $j = 1, \dots, p$ les m_j termes $\dfrac{1}{X - z_i}$ tels que $z_i = r_j$, on obtient
$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{p} \frac{m_j}{X - r_j}.$$
3. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non nul. On suppose que Q' divise Q. Donc $d°Q \neq 0$ (le polynôme nul ne divise aucun polynôme non nul). On peut donc appliquer la question 3., la décomposition de $\dfrac{Q'}{Q}$ est donc
$$\frac{Q'}{Q} = \sum_{i=1}^{p} \frac{m_j}{x - r_j}$$
Où p est le nombre de racines distinctes de $Q, r_1, \dots r_p$ ses racines distinctes et $m_1, \dots; m_p$ leur multiplicités respectives. D'autre part si $a_n X^n$ est le terme dominant dans Q celui de Q' est $n a_n X^{n-1}$ donc le quotient de Q par Q' est un polynôme de degré 1 de la forme $\dfrac{1}{n}(X - b)$ avec $b \in \mathbb{R}$. Donc
$$\frac{Q'}{Q} = \frac{n}{X - b}$$
Mais alors l'unicité de la décomposition en éléments simples de $\dfrac{Q'}{Q}$ assure que $p = 1$ et que Q admet pour seule racine b. Autrement dit Q est de la forme :
$$Q = a(X - b)^n$$
avec b un réel et a un réel non nul. Réciproquement on vérifie sans mal que pour tout élément $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ le polynôme $a(X - b)^n$ est divisible par son polynôme dérivé. Par ailleurs le polynôme nul est dérivable par son polynôme dérivé. L'ensemble des éléments de $\mathbf{C}[X]$ qui sont divisible par leur dérivée est donc :
$$\{a(X - b)^n, (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

Exercice 4. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Montrer que :
$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}\left(f^2\right) \iff \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) = E \iff \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}\left(f^2\right).$$

Commençons par montrer que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}\left(f^2\right) \iff \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$. D'après le théorème du rang, on a
$$\dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) = \dim(E)$$
$$\dim(\operatorname{Im}\left(f^2\right)) + \dim(\operatorname{Ker}\left(f^2\right)) = \dim(E).$$
Donc si $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}\left(f^2\right)$, alors $\dim(\operatorname{Im}\left(f^2\right)) = \dim(\operatorname{Im}(f))$. Donc $\dim(\operatorname{Ker}\left(f^2\right)) = \dim(\operatorname{Ker}(f))$. Or $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$. Donc $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$.

On montre de même que si $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$, alors $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}\left(f^2\right)$.

Montrons maintenant que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}\left(f^2\right) \iff \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) = E$.

Supposons maintenant que $\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) = E$. Il suffit de montrer que $\operatorname{Ker}\left(f^2\right) \subset \operatorname{Ker}(f)$. Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$. On a donc $f(x)$ qui appartient à $\operatorname{Ker}(f)$. Or $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = 0$. Donc $f(x) = 0$. D'où x appartient à $\operatorname{Ker}(f)$.

Supposons enfin que $\operatorname{Ker}\left(f^2\right) = \operatorname{Ker}(f)$. Montrons que $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$. Soit $y \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Donc $f(f(x)) = f(y) = 0$. D'où x appartient à $\operatorname{Ker}\left(f^2\right)$. Donc x appartient à $\operatorname{Ker}(f)$. On a donc $y = 0$. Maintenant $\dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) = \dim(E)$. Donc $\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) = E$.

Exercice 5. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ainsi que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(g)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Méthode n°1 Soit $h = f_{|\,\mathrm{Ker}(g\circ f)}$ la restriction de f au sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(g \circ f)$. Écrivons la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \dim(\mathrm{Ker}(h)) + \dim(\mathrm{Im}(h))$. Or $\mathrm{Ker}(h) \subset \mathrm{Ker}(f)$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(h)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f))$.
De plus $\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Ker}(g)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(h)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(g))$. Les deux inégalités trouvées sur les dimensions conduisent à la relation cherchée.

Méthode n°2 Soit $h = g_{|\,\mathrm{Im}(f)}$ la restriction de g au sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$. Écrivons la formule du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(h)) + \dim(\mathrm{Im}(h))$. Or $\mathrm{Ker}(h) \subset \mathrm{Ker}(g)$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(h)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(g))$. De plus $\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(h)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(g \circ f))$. Donc, $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(g)) + \dim(\mathrm{Im}(g \circ f))$.
Or $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$ et $\dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(g \circ f))$, qui conduisent à la relation cherchée.

Exercice 6. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$K_p = \mathrm{Ker}(f^p) \quad \text{et} \quad I_p = \mathrm{Im}(f^p).$$

1. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.
2. Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leqslant n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
3. Montrer que $I_r = I_{r+1}$.
4. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, K_r = K_{r+k}$ et $I_r = I_{r+k}$.
5. Montrer que $E = K_r \oplus I_r$.

---

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $x \in K_p$. On a donc $f^p(x) = 0$. Donc $f^{p+1}(x) = 0$. donc x appartient à K_{p+1}.
   Soit $y \in I_{p+1}$. il existe donc $x \in E$ tel que $f^{p+1}(x) = y$. Donc $f^p(f(x)) = y$. D'où $y \in I_p$.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note n_p la dimension de K_p. d'après la question précédente (n_p) est une suite croissante d'entiers. Elle admet donc un maximum. Il existe donc p_0 tel que pour tout $p \geq r$, $n_p = n_r$. Donc $K_r = K_{r+1}$.
3. On a $I_{r+1} \subset I_r$ et $\dim(I_{r+1}) = \dim(E) - \dim(K_{r+1}) = \dim(E) - \dim(K_r) = \dim(I_r)$. On a donc $I_{r+1} = I_r$.
4.
   - Soit $p > r$. On sait l'inclusion $I_{p+1} \subset I_p$. Inversement, considérons $y \in I_p$. Il existe x dans E tel que
     $$y = f^p(x) = f^{p-r}(f^r(x))$$
     Puisque $f^r(x)$ est élément de I_r avec $I_r = I_{r+1}$, on peut introduire un élément a de E tel que $f^r(x) = f^{r+1}(a)$ et alors $y = f^{p+1}(a)$. Le vecteur y est donc élément de I_{p+1}. Ainsi, on obtient $I_p \subset I_{p+1}$ puis l'égalité.
     La suite (I_p) est alors constante à partir du rang r.
   - Les dimensions des espaces images I_p étant les mêmes au delà du rang r, la théorème du rang assure que, parallèlement, les dimensions des espaces noyaux K_p sont elles aussi identiques au delà du rang r. Par inclusion et égalité des dimensions, la suite (K_p) est constante à partir du rang r.
5. Montrons que $K_r \cap I_r = \{0\}$. On a $I_{r+r} = I_r$. Or l'image de f^{r+r} est égale à l'image de la restriction de f^r à I_r. Donc la restriction de f^r à I_r est injective. Donc $K_r \cap I_r = \{0\}$. Maintenant, on a :
   $$\dim(K_r \oplus I_r) = \dim(K_r) + \dim(I_r) = \dim(E)$$
   Donc $K_r \oplus I_r = E$.