TD 14. Algèbre 2. Géométrie 2

Exercice 1

1. $X^3 - X = X(X^2-1) = X(X-1)(X+1)$.

Donc $\dfrac{1}{X^3 - X} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{X+1} = \dfrac{1}{X(X-1)(X+1)}$

$a = -1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}$.

2. $1X^2 + 2X + 5 = 1X^2 - 3X + 2 + 5X + 3$. et $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$

Donc $\dfrac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} = 1 + \dfrac{5X+3}{(X-1)(X-2)}$

$= 1 + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-2}$.

$a = -8$ et $b = 13$.

$1 - \dfrac{8}{X-1} + \dfrac{13}{X-2} = \dfrac{(X-1)(X-2) - 8(X-2) + 13(X-1)}{(X-1)(X-2)}$

3. $\dfrac{1}{X(X-1)^2} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{(X-1)^2}$.

$a = 1, \quad c = 1, \quad 0 = a + b$ donc $b = -1$.

4. $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$

Donc $X^3 + 1 = (X-1)^3 + 3X^2 - 3X + 2$

Donc $\dfrac{X^3+1}{(X-1)^3} = 1 + \dfrac{3X^2 - 3X + 2}{(X-1)^3}$

$\dfrac{3X^2 - 3X + 2}{(X-1)^3} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{(X-1)^3}$

$c = 2$, on $\times$ par X puis $X \to +\infty$, $3 = a + 0 + 0$ donc $a = 3$

Pour $X = 0$, $-2 = -a + b - c$, donc $b = 3$.

5. $(X+1)^2(X^2+1) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

Donc $X^4 + 1 = (X+1)^2(X^2+1) - 2X^3 - 2X^2 - 2X$

$\dfrac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)} = 1 + \dfrac{-2X^3 - 2X^2 - 2X}{(X+1)^2(X^2+1)}$.

$1^{ère}$ méthode : $\dfrac{-2X^3-2X^2-2X}{(X+1)^2(X^2+1)} = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{(X+1)^2} + \dfrac{cX+d}{X^2+1}$

$b = \dfrac{2-2+2}{2} = 1$, $\dfrac{-2i^3-2i^2-2i}{(i+1)^2} = ci+d$.

$\dfrac{-2i^3-2i^2-2i}{(i+1)^2} = \dfrac{2}{2i} = -i = ci+d$ et $c, d \in \mathbb{R}$.

Donc $c=-1$ et $d=0$.

$\dfrac{-2X^3-2X^2-2X}{(X+1)^2(X^2+1)} = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{1}{(X+1)^2} + \dfrac{-X}{X^2+1}$

$-2 = a-1$, $a=-1$.

$2^{ème}$ méthode : $(X+1)^2(X^2+1) = (X+1)^2(X-i)(X+i)$

$R = \dfrac{-2X^3-2X^2-2X}{(X+1)^2(X^2+1)} = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{(X+1)^2} + \dfrac{c}{X-i} + \dfrac{d}{X+i}$. $a,b,c,d \in \mathbb{C}$.

$R = \overline{R}$, $= \dfrac{\overline{a}}{X+1} + \dfrac{\overline{b}}{(X+1)^2} + \dfrac{\overline{c}}{X+i} + \dfrac{\overline{d}}{X-i}$

$a \in \mathbb{R}$ $\quad b \in \mathbb{R}$

$b=1$. $c = \dfrac{-2i^3-2i^2-2i}{(i+1)^2 \times 2i} = -\dfrac{1}{2}$, $d = -\dfrac{1}{2}$

$a = -1$

$R = \dfrac{-1}{X+1} + \dfrac{1}{(X+1)^2} - \dfrac{1}{2}\left(\underbrace{\dfrac{1}{X-i} + \dfrac{1}{X+i}}\right)$

$\dfrac{X+i+X-i}{(X-i)(X+i)} = \dfrac{2X}{X^2+1}$

6. $1+X^3 = (X+1)(\underbrace{X^2-X+1}_{\text{irr dans } \mathbb{R} \text{ car } \Delta=-3<0})$

$\dfrac{1}{1+X^3} = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{bX+c}{X^2-X+1}$ $\quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$= \dfrac{1}{(X+1)(X^2-X+1)}$

$$a = \frac{1}{3}, \qquad 0 = a + b, \qquad b = -\frac{1}{3}.$$

Pour $X = 0$, $1 = a + c$, $c = 1 - a = \frac{2}{3}$.

$$\frac{1}{1+X^3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{X+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{-X+2}{X^2-X+1}\right).$$

Exercice 2

1. $$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{2ik\pi/n}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k) \quad \text{où } \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

$$\frac{\overset{A}{1}}{\underset{B}{X^n - 1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - \omega_k} \quad \text{où } a_k \in \mathbb{C}.$$

$$B' = nX^{n-1}, \qquad \omega_k^n = 1, \qquad \frac{1}{\omega_k^{n-1}} = \omega_k.$$

$$a_k = \frac{A(\omega_k)}{B'(\omega_k)} = \frac{1}{n\,\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n}.$$

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k}.$$

2. $$\frac{n!}{X(X-1)\cdots(X-n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{X - k} \quad \text{avec } a_k \in \mathbb{R}$$

On multiplie par $X - k$, puis $X = k$.

$$\frac{n!}{k \times (k-1)\cdots(k-(k-1))(k-(k+1))\cdots(k-n)} = a_k$$

$$a_k = \frac{n!}{k \times (k-1)\cdots \times 2 \times 1 \times (-1)(-2)\cdots \times (-(n-k))}$$

$$a_k = \frac{(-1)^{n-k}\, n!}{k!\,(n-k)!}$$

3. $$\frac{1}{A} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{X - a_i} \quad \text{où } b_i \in \mathbb{R}.$$

$$b_i = \frac{1}{A'(a_i)}, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{A} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)\,(X-a_i)}.$$

Si $\deg A \geq 2$,

$$\frac{X}{A} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X}{A'(a_i)\,(X-a_i)}$$

donc $$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)}.$$

Si $\deg A = 1$, $A = X - a_1$. et par passage à la limite, $1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)} = \frac{1}{A'(a_1)}$.

$n=$

ou. $A' = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{A'(a_i)} = \sum_{i=1}^{1} 1 = 1.$$

Exercice 4.

. On a $\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim E$

$= \dim \operatorname{Im} f^2 + \dim \ker f^2$

Si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, donc $\dim \ker f = \dim \ker f^2$.

Or $\ker f \subset \ker f^2$ ($x \in \ker f$ alors $f(x) = 0$

donc $f^2(x) = f(0) = 0$)

$x \in \ker f^2$.

Donc $\ker f = \ker f^2$.

Si $\ker f = \ker f^2$ alors $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^2$

Or $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ ($x \in \operatorname{Im} f^2$, $x = f^2(y)$

$= f(f(y))$

$= f(z)$

$\in \operatorname{Im} f$)

Donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

D'où (1) $\iff$ (3).

Montrons que (2) $\iff$ (3).

Supposons que $\operatorname{Im} f \oplus \ker f = E$.

On a $\ker f \subset \ker f^2$.

Soit $x \in \ker f^2$. Alors $f^2(x) = 0$

Donc $f(f(x)) = 0$. Donc $f(x) \in \ker f$.

Or $f(x) \in \operatorname{Im} f$. Donc $f(x) \in \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$

Donc $f(x) = 0$. Donc $x \in \ker f$.

Donc $\ker f^2 \subset \ker f$.

D'où $\ker f = \ker f^2$. Donc ② $\Rightarrow$ ③.

- Supposons que $\ker f = \ker f^2$.

On a $\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim E$ (théorème du rang)

Montrons que $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$.

Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \ker f$.

On a $x = f(y)$ avec $y \in E$ et $f(x) = 0$.

Donc $f(f(y)) = 0$, soit $f^2(y) = 0$.

Donc $y \in \ker f^2 = \ker f$. Donc $f(y) = 0$.

Donc $x = f(y) = 0$.

Donc $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$.

Donc $\operatorname{Im} f \oplus \ker f = E$.

Donc ③ $\Rightarrow$ ②.

Exercice 5

Soit $$h : \ker(g \circ f) \to F$$
$$x \mapsto f(x).$$

Par le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Im} h + \dim \ker h = \dim \ker(g \circ f).$$

Or $\ker h \subset \ker f$: (si $x \in \ker h$ alors $h(x) = 0$ donc $x \in \ker f$)

$f(x)$

Donc $\dim \ker h \leq \dim \ker f$.

Or $\operatorname{Im} h \subset \ker g$: si $x \in \operatorname{Im} h$ alors $x = h(y)$
avec $y \in \ker(g \circ f)$.

Donc $g(x) = g(h(y)) = g(f(y))$
$= (g \circ f)(y) = 0$

Donc $x \in \ker g$.

Donc $\dim \operatorname{Im} h \leq \dim \ker g$.

$\dim \operatorname{Im} h + \dim \ker h = \dim \ker(g \circ f) \leq \dim \ker g + \dim \ker f$.

Exercice 6

1. Soit $p \in \mathbb{N}$.

• Soit $x \in K_p = \ker f^p$. Donc $f^p(x) = 0$, donc $\underbrace{f(f^p(x))}_{f^{p+1}(x)} = 0$

Donc $x \in \ker f^{p+1} = K_{p+1}$.

Donc $K_p \subset K_{p+1}$.

• Soit $x \in I_{p+1} = \operatorname{Im} f^{p+1}$. Donc $x = f^{p+1}(y)$ où $y \in E$.
$= f^p(\underbrace{f(y)}_{z \in E})$

Donc $x \in I_p$.

Donc $I_{p+1} \subset I_p$.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\dim K_p \leq \dim K_{p+1}$ et $\dim K_p \in \mathbb{N}$

Donc la suite $(\dim K_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers majorée par n car $K_p \subset E$.

Donc il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $K_r = K_{r+1}$.

3. On a $I_{r+1} \subset I_r$

Or $\underbrace{\dim K_r}_{=} + \dim I_r = \dim E$
$= \underbrace{\dim K_{r+1}}_{=} + \dim I_{r+1}$

Donc $\dim I_r = \dim I_{r+1}$. Donc $I_r = I_{r+1}$.

4. Soit $p > r$. Montrons que $I_p = I_{p+1}$.

On a $I_{p+1} \subset I_p$.

Soit $x \in I_p$. Alors $x = f^p(y)$ où $y \in E$

$$= f^{p-r}(f^r(y))$$

Or $f^r(y) \in \mathrm{Im} f^r = I_r = I_{r+1}$

Donc $f^r(y) = f^{r+1}(z)$ où $z \in E$

Donc $x = f^{p-r}(f^{r+1}(z)) = f^{p+1}(z)$, donc $x \in I_{p+1}$.

Donc $I_p \subset I_{p+1}$.

D'où $I_p = I_{p+1}$, pour tout $p \geq r$.

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_r = I_{r+k}$.

On a $K_r \subset K_{r+k}$ et par le théorème du rang,

$\dim K_r = \dim K_{r+k}$, donc $K_r = K_{r+k}$.

5. • $\dim K_r + \dim I_r = \dim E$,

• Montrons que $K_r \cap I_r = \{0\}$.

Soit $v : I_r \to I_{2r}$. Si $x \in I_r$, $x = f^r(y)$

$x \mapsto f^r(x)$ $\quad v(x) = f^r(x) = f^{2r}(y) \in \mathrm{Im} f^{2r}$.

v est surjective :

soit $y \in I_{2r}$: $y = f^{2r}(x)$

$$= f^r(f^r(x)) = v(\underbrace{f^r(x)}_{\in I_r}).$$

Or $I_r = I_{2r}$ (donc $\dim I_r = \dim I_{2r}$).

Donc v est bijective et donc injective ; donc $\ker v = \{0\}$

Or $\ker v = \ker f^r \cap I_r = K_r \cap I_r$.

Donc $K_r \cap I_r = \{0\}$.

Donc $K_r \oplus I_r = E$.