Révisions

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$

~~" $u_3 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, donc $\begin{cases} \cdot \\ \cdot \end{cases}$ ce système~~

~~n'a pas de solutions. Donc la famille est libre " Faux.~~

$u_3 \notin \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$

$u_3 = (1,1)$, $u_2 = (1,0)$, $u_1 = (2,0)$.

" Supp $u_3 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ alors $\begin{cases} 1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 1 = 0 \end{cases}$ Abs... "

$u_3 \notin \mathrm{vect}(u_1, u_2)$.

$$\mathrm{mat}_{B_1, B_2} f = \begin{array}{c c} \begin{array}{c} f(e_1) \;\cdots\; f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_{1i} \\ \lambda_{2i} \\ \vdots \\ \lambda_{ni} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \end{array}$$

$B_1 = (e_1, \dots e_n)$

$B_2 = (f_1, \dots f_n)$

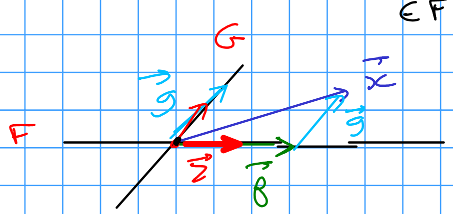
$f(e_i) = \lambda_{1i} f_1 + \dots + \lambda_{ni} f_n$

$\mathrm{rg}(u_1, \dots u_n) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, \dots u_n)) = \dim(\mathrm{Vect}(\underbrace{u_1, \dots u_p}_{\text{libre}}))$

$= p$.

$\mathrm{mat}_B f = (C_1 | \dots | C_n)$ $\quad \mathrm{rg} f = \mathrm{rg}(C_1, \dots C_n)$.

$\vec{x} \in E$, $\vec{x} = \underset{\in F}{\vec{f}} + \underset{\in G}{\vec{g}}$, $p(\vec{x}) = \vec{f}$ si p est la projection sur F // G.



Si $\vec{y} \in G$, $p(\vec{y}) = \vec{0}$

Si $\vec{z} \in F$, $p(\vec{z}) = \vec{z}$.

$f : E \to F$ application linéaire

$\dim \ker f + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{\operatorname{rg} f} = \dim E$.

$A \subset B$

et $\dim A = \dim B$

Alors $A = B$.

$A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f$

$B = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} g$

$AB = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f \circ g$, $A^n = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f^n$, $A^{-1} = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f^{-1}$.

Exercice 1 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 5 tel que :

$(X+2)^3 \mid P+10$ et $(X-2)^3 \mid P-10$.

- -2 est racine de $P+10$ de multiplicité ≥ 3

-2 est racine de $(P+10)' = P'$ de multiplicité ≥ 2.

Donc $(X+2)^2 \mid P'$

- 2 est racine de $P-10$ de multiplicité ≥ 3

2 est racine de $(P-10)' = P'$ de multiplicité ≥ 2.

Donc $(X-2)^2 \mid P'$

Donc $(X+2)^2 (X-2)^2 \mid P'$, donc $\underbrace{P'}_{\deg 4} = \underbrace{Q}_{\deg 0} \times \underbrace{(X+2)^2 (X-2)^2}_{\deg 4}$,

Donc $P' = \lambda (X+2)^2 (X-2)^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

$= \lambda (X^2 - 4)^2 = \lambda (X^4 - 8X^2 + 16)$.

Donc $P = \lambda \left(\frac{X^5}{5} - \frac{8X^3}{3} + 16X \right) + \mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Or $(P-10)(2) = P(2) - 10 = 0$, $P(2) = 10$

et de même, $P(-2) + 10 = 0$, $P(-2) = -10$.

Donc $\begin{cases} \lambda\left(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32\right)+\mu=10 \\ \lambda\left(-\frac{32}{5}+\frac{64}{3}-32\right)+\mu=-10 \end{cases}$

donc $\begin{cases} 2\mu=0 \\ \lambda=\dfrac{10-\mu}{\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32} \end{cases}$, donc $\begin{cases} \mu=0 \\ \lambda=\frac{75}{128} \end{cases}$.

Donc $P=\frac{75}{128}\left(\frac{X^5}{5}-\frac{8X^3}{3}+16X\right)$.

Réciproquement, on vérifie que $P(2)-10=0$, $P(-2)+10=0$, $(X-2)^3 \mid \underbrace{P-10}_{\varphi}$ (en montrant que $\varphi(2)=\varphi'(2)=\varphi''(2)=0$)

et $(X+2)^3 \mid P+10$.

Exercice 2

1. • Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, $(P,\varphi)\in\mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P+\varphi) &= 2(\lambda P+\varphi)-(X-1)(\lambda P+\varphi)' \\ &= 2\lambda P+2\varphi-(X-1)(\lambda P'+\varphi') \\ &= \lambda(2P-(X-1)P')+(2\varphi-(X-1)\varphi') \\ &= \lambda f(P)+f(\varphi). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

• Soit $P\in\mathbb{R}_2[X]$.

$$f(P)=\underbrace{2P}_{d^\circ\le 2}-\underbrace{\underbrace{(X-1)}_{\deg 1}\underbrace{P'}_{\deg\le 1}}_{\deg\le 2}$$ de degré ≤ 2.

Donc $f(P)\in\mathbb{R}_2[X]$.

Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_C} f = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow X \\ \leftarrow X^2 \end{array}$$

$f(1)=2$

$f(X)=2X-(X-1)=X+1$

$f(X^2)=2X^2-(X-1)2X$

$=2X$

3. • Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

$P \in \ker f$ ssi $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ssi $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a = c \\ b = -2a \end{cases}$

(ssi $(a,b,c) = (a, -2a, a) = a(1,-2,1)$)

ssi $P = a - 2aX + aX^2 = a(1 - 2X + X^2)$

ssi $P \in \mathrm{Vect}(1 - 2X + X^2)$. (vecteur générateur et non nul).

Une base de $\ker f$ est donc $(1 - 2X + X^2)$

• $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(2, 1+X, 2X)$
$= \mathrm{Vect}(1, \cancel{1+X}, X)$
$= \mathrm{Vect}(1, X)$.

Une base de $\mathrm{Im} f$ est donc $(1, X)$.

ou . $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = 3$
donc $\dim \mathrm{Im} f = 3 - 1 = 2$.
Or $1, X \in \mathrm{Im} f$
$\underbrace{\mathrm{Vect}(1,X)}_{\text{de dim } 2} \subset \underbrace{\mathrm{Im} f}_{\text{dim } 2}$
Donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(1, X)$

4. • $\ker f \neq \{0\}$, donc f n'est pas injective.

• ($\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X] \neq \mathbb{R}_2[X]$,) donc f n'est pas surjective.

• f n'est donc pas bijective.

$f : E \to F$
si $\dim E = \dim F < +\infty$
inj $\Leftrightarrow$ surj $\Leftrightarrow$ bij.

5. • $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}_2[X]$

• Soit $P \in \ker f \cap \mathrm{Im} f$.

Alors $P = \lambda_1(1 - 2X + X^2)$ et $P = \lambda_2 + \lambda_3 X$

Donc $\lambda_1(1 - 2X + X^2) = \lambda_2 + \lambda_3 X$ donc $\lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \lambda_3$

Donc $P = 0$.

Donc $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}_2[X]$.

ou $(1 - 2X + X^2)$ base de $\ker f$ et $(1, X)$ base de $\mathrm{Im} f$.
Comme $(1 - 2X + X^2, 1, X)$ base de $\mathbb{R}_2[X]$, on retrouve le résultat.

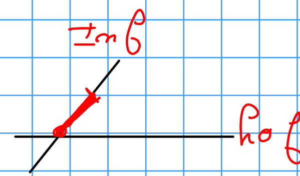
6. a) $1+X+X^2 = \underbrace{P_1}_{\in \ker f} + \underbrace{P_2}_{\operatorname{Im} f}$ Alors $p(1+X+X^2) = P_1$.

$$= \underbrace{1-2X+X^2}_{\in \ker f} + \underbrace{2X}_{\in \operatorname{Im} f}.$$

Donc $p(1+X+X^2) = 1-2X+X^2$.

b) Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$.

- $f\circ p(Q) = f(\underbrace{p(Q)}_{\in \ker f}) = 0$, donc $f\circ p = 0$.



- $p\circ f(Q) = p(\underbrace{f(Q)}_{\in \operatorname{Im} f = \{f(R),\, R\in \mathbb{R}_2[X]\}}) = 0$.

Donc $p\circ f = 0$.

Exercice 3

1. . $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.

. $0 \in F$: $A | 0$ car $0 = A\times 0$

. Soient $(P,Q)\in F^2$ et $(\lambda,\mu)\in \mathbb{K}^2$

On a $A|P$ et $A|Q$ donc $A | \lambda P+\mu Q$. Donc $\lambda P+\mu Q\in F$.

$P = AP_1$, $Q = AQ_1$

$\lambda P+\mu Q = \lambda AP_1 + \mu AQ_1 = A(\lambda P_1 + \mu Q_1)$.

Donc F est un sev de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. Soit $P\in \mathbb{K}_n[X]$. Posons $d = \deg A$.

$P\in F$ ssi $A|P$

ssi $\underbrace{P}_{\deg \le n} = AQ$ et $\deg Q \le n-d$ $\quad$ ($\deg(AQ) = \deg A + \deg Q$)

ssi $P = A\times \left(\sum_{k=0}^{n-d} q_k X^k\right)$

$$= \sum_{k=0}^{n-d} c_k AX^k = c_0 A + c_1 AX + \dots + c_{n-d} AX^{n-d}$$

ssi $P \in \mathrm{Vect}(A, AX, \dots, AX^{n-d})$.

Donc $F = \mathrm{Vect}(A, AX, \dots, AX^{n-d})$.

Donc $(\underbrace{A}_{d}, \underbrace{AX}_{d+1}, \dots, \underbrace{AX^{n-d}}_{n})$ est génératrice, de degrés échelonnés

donc libre. Donc c'est une base de F.

Donc $\dim F = n-d+1$.

Posons $G = \mathrm{Vect}(1, X, \dots X^{d-1})$.

Comme la famille $(1, X, \dots X^{d-1}, A, AX, \dots AX^{n-d})$ est une base de E, G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 4

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]$

$$\phi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X)$$
$$= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - (\lambda P(X) + Q(X))$$
$$= \lambda (P(X+1) - P(X)) + Q(X+1) - Q(X)$$
$$= \lambda \phi(P) + \phi(Q).$$

Donc ϕ est linéaire et pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}[X]$.

Donc ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. a) Soit $P \in \ker \phi$.

Alors $\phi(P) = 0$,

soit $P(X+1) = P(X)$.

Si $n = 0$, $P(0) = P(0)$

Pour $X = 0$, $P(1) = P(0)$

Pour $X = 1$, $P(2) = P(1) = P(0)$.

Par récurrence : • pour $n=0$, $P(0)=P(0)$.

• Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $P(n)=P(0)$.

Alors, pour $X=n$, $P(n+1)=P(n)=P(0)$. D'où H_{n+1}.

Donc par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(n)=P(0)$.

b) Soit $P\in\ker\phi$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(n)=P(0)$.

Posons $\varphi=P-P(0)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n)=0$.

Donc φ admet une infinité de racines, donc $\varphi=0$,

ie $P=P(0)$. Donc P est un polynôme constant,

ie $P\in\mathbb{R}_0[X]$. Donc $\ker\phi\subset\mathbb{R}_0[X]$.

Réciproquement, si $P\in\mathbb{R}_0[X]$ alors $P=\lambda\in\mathbb{R}$,

et $\phi(P)=P(X+1)-P(X)=\lambda-\lambda=0$.

Donc $\mathbb{R}_0[X]\subset\ker\phi$. D'où $\ker\phi=\mathbb{R}_0[X]$.

3. a) $\phi(P)=P(X+1)-P(X)$ $\qquad P=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$, $a_n\neq 0$.

$$=\sum_{i=0}^{n}a_i(X+1)^i-\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$$

$$=\sum_{i=0}^{n}a_i\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}X^k-\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$$

$$=a_n\underbrace{\binom{n}{n}}_{1}X^n+a_n\binom{n}{n-1}X^{n-1}+a_{n-1}\overbrace{\binom{n-1}{n-1}}^{1}X^{n-1}$$

$$\underbrace{+\cdots}_{\deg<n-1}-a_nX^n-a_{n-1}X^{n-1}+\cdots-a_0$$

$$=\underbrace{na_n}_{\neq 0}X^{n-1}+\underbrace{\cdots}_{\deg<n-1}$$

Donc $\phi(P)$ est de degré $n-1$ et de coefficient dominant na_n.

b) $\phi(P)$ est de degré $n-1$ donc $\phi(P)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$\phi(\mathbb{R}_n[X])\subset\mathbb{R}_n[X]$: Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]\subset\mathbb{R}_n[X]$.

Donc $\phi(\mathbb{R}_n[X])\subset\mathbb{R}_n[X]$.

4. $\Phi_n : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$.
$P \longmapsto \Phi(P)$

$$\begin{aligned}\ker \Phi_n &= \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, \Phi_n(P) = 0\} \\ &= \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, \Phi(P) = 0\} \\ &= \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \Phi(P) = 0\} \cap \mathbb{R}_n[X] \\ &= \mathbb{R}_0[X] \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_0[X].\end{aligned}$$

D'après le théorème du rang, $\dim \ker \Phi_n + \dim \operatorname{Im} \Phi_n = \dim \mathbb{R}_n[X]$

$\dim \operatorname{Im} \Phi_n = n+1 - 1 = n$.

Or d'après 3.b), $\operatorname{Im} \Phi_n = \Phi_n(\mathbb{R}_n[X])$
$= \Phi(\mathbb{R}_n[X])$
$\subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$

Par égalité des dimensions, $\operatorname{Im} \Phi_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons $n = \deg P$.

Alors $P \in \mathbb{R}_n[X] = \operatorname{Im} \Phi_{n+1}$.

Donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $\underbrace{\Phi_{n+1}(\varphi)}_{\Phi(\varphi)} = P$.

Donc Φ est surjective.

FIN !